

УДК 532.529.522.574.695+621.039.588

Ivan Kazachkov¹, Doctor of Engineering Sciences, Professor, Head of Department
ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0001-9645-563X> *e-mail*: kazachkov.iv@ndu.edu.ua

Oleksandr Nesterenko², Doctor of Engineering Sciences, Professor, Leading Researcher
ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0001-5329-889X>
e-mail: aleksandrnesterenkoua@gmail.com

¹Nizhyn Mykola Gogol State University, Nizhyn, Ukraine

²Institute of Telecommunications and Global Information Space of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, Ukraine

MODELLING AND COMPUTER SIMULATION OF THE TURBULENT TWO-PHASE JETS OF NANO FLUIDS

Abstract. *The present paper is devoted to development of the mathematical models and numerical procedures for simulation of the mixing and heat transfer features of mutually immiscible liquids in the two-fluid turbulent heterogeneous jet flow, as well as in more general case – turbulent multiphase jets. Many natural and technical processes deal with the turbulent jets of mutually immiscible liquids, which represent an important class of the modern multiphase system dynamics. Differential equations for the axially symmetrical two-dimensional stationary flow and the integral correlations in a cylindrical coordinate system by Professor Alfred Nakorchevskii are considered for the jet of fluid flowing from a nozzle into a space filled with another fluid that is not miscible with the first one. Parameters of the turbulent mixing in the two-phase jet flow are modeled and analyzed. Previously the experimental data with water and oil, as well as with liquid metals, confirmed the results of numerical computer simulation when one example was performed for simulation of the high-temperature melts' flow cooled by water in the hypothetic severe accidents at the nuclear power plant. The results obtained may be of interest for some research and industrial tasks, where the calculation of parameters of the multiphase turbulent mixing and heat transfer are important. Here the mathematical modelling and computer simulation of the mixing and heat transfer processes in the two-fluid turbulent heterogeneous jet flow of Nano fluids is considered. Many natural and technical processes deal with the turbulent jets of mutually immiscible liquids, which represent an important class of the modern multiphase system dynamics including the ones for the features of Nano fluids. Differential equations for the axially symmetrical two-dimensional stationary flow and the integral correlations in a cylindrical coordinate system were considered for the jet of fluid from a nozzle into a space filled with another fluid that is not miscible with the first one. Parameters of the turbulent mixing during the spreading of such jets are modeled and analyzed. The method was proved successfully during the half of the century in many different physical tasks including experimental studies with using the invented two-phase micro-sensor of Prof. A.I. Nakorchevskii and Dr. V.O. Chernov. The results obtained for the flow of a few Nano fluids may be of interest for the research and industrial tasks, where the calculation of multiphase turbulent mixing and heat transfer are important.*

Keywords: *mathematical modeling, computational experiment, turbulent, two-phase, jets, immiscible liquids, nanofluids.*

І.В. Казачков¹, О.В. Нестеренко²

¹Ніжинський державний університет імені Миколи Гоголя, м. Ніжин, Україна

²Інститут телекомунікацій і глобального інформаційного простору Національної академії наук України, м. Київ, Україна

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА ОБЧИСЛЮВАЛЬНИЙ ЕКСПЕРИМЕНТ ТУРБУЛЕНТНИХ ДВОФАЗНИХ СТРУМЕНІВ НЕЗМІШУВАНИХ РІДИН ТА НАНОРІДИН

Анотація. Ця стаття присвячена розробці математичних моделей та числових процедур для моделювання особливостей змішування та теплопередачі взаємно незмішуваних рідин у двофазному турбулентному гетерогенному струменевому потоці, а також у більш загальному випадку – турбулентних багатофазних струменів. Багато природних та технічних процесів пов'язані з турбулентними струменями взаємно незмішуваних рідин, які представляють важливий клас сучасної динаміки багатофазних систем. Диференціальні рівняння для аксіально-симетричного двовимірного стаціонарного потоку та інтегральні кореляції в циліндричній системі координат професора Альфреда Накорчевського розглянуті для струменя рідини, що витікає з сопла в простір, заповнений іншою рідиною, яка не змішується з першою. Моделюються та аналізуються параметри турбулентного змішування в двофазному струменевому потоці. Раніше експериментальні дані з водою та нафтою, а також з рідкими металами, підтвердили результати числового комп'ютерного моделювання, коли один приклад був виконаний для моделювання потоку високотемпературних розплавів, охолоджених водою, в гіпотетичних важких аваріях на атомній електростанції. Отримані результати можуть бути цікавими для деяких дослідницьких та промислових завдань, де важливим є розрахунок параметрів багатофазного турбулентного перемішування та теплопередачі. Тут розглядається математичне моделювання та комп'ютерне моделювання процесів перемішування та теплопередачі в дворідинному турбулентному гетерогенному струменевому потоці нанорідин. Багато природних та технічних процесів мають справу з турбулентними струменями взаємно незмішуваних рідин, які представляють важливий клас сучасної динаміки багатофазних систем, включаючи ті, що стосуються особливостей нанорідин. Диференціальні рівняння для аксіально-симетричного двовимірного стаціонарного потоку та інтегральні кореляції в циліндричній системі координат були розглянуті для струменя рідини з сопла в простір, заповнений іншою рідиною, яка не змішується з першою. Моделюються та аналізуються параметри турбулентного перемішування під час розтікання таких струменів. Метод був успішно випробуваний протягом півстоліття в багатьох різних фізичних завданнях, включаючи експериментальні дослідження з використанням винайденого двофазного мікросенсора професора А.І. Накорчевського та к.т.н. В.О. Чернова. Результати, отримані для потоку кількох нанорідин, можуть бути цікавими для дослідницьких та промислових завдань, де важливим є розрахунок багатофазного турбулентного перемішування та теплопередачі.

Ключові слова: математичне моделювання, обчислювальний експеримент, турбулентний, двофазний, струмені, незмішувані рідини, нанорідини.

[https:// doi.org/10.32347/2411-4049.2026.2.189-205](https://doi.org/10.32347/2411-4049.2026.2.189-205)

Вступ

Постановка завдання. Тривимірний друк (3D-друк), також відомий як Адитивне виробництво (АД), має багато переваг, включаючи відмову від спеціального оснащення, гнучкий та настроюваний дизайн, а також ефективне використання сировини. Струменеве нанесення сполучного матеріалу є однією з семи технологій АД, визначених ASTM та ISO [1]. Коли для виготовлення деталі використовується струменеве нанесення сполучного матеріалу, спочатку формується порошковий шар, потім створюється зелена деталь шляхом вибіркового нанесення рідкого сполучного матеріалу на порошковий шар, і, нарешті, зелена деталь ущільнюється спіканням [1]. Переваги струменевого нанесення сполучного матеріалу включають безкоштовну підтримку та легкість видалення сполучного матеріалу [2, 3]. Порошки сировини, що використовуються для струменевого нанесення сполучного матеріалу, включають нанопорошок (або субмікронний порошок) [4–7], мікропорошок [8–14] та гранульований порошок [7, 15–23]. Гранульований порошок часто готують з нанопорошку, а розмір гранул зазвичай знаходиться в мікрометровому діапазоні [21–23]. Нанопорошок оксиду алюмінію (90-187085) був придбаний у Allied High Tech, США. Мікропорошок оксиду алюмінію (26R-8S70) був придбаний у компанії Inframat, США.

Мета дослідження – показати підходи до математичного моделювання та обчислювальних експериментів турбулентних двофазних струменів незмішуваних рідин та нанорідин та виявити особливості турбулентного змішування нанопорошку оксиду алюмінію та мікропорошку при витіканні струменя з сопла в простір з водою.

Цільова спрямованість обумовлює логіку дослідження, яка направлена на постановку та вирішення наступних завдань:

- а) встановити закономірності просторового розподілу фаз двофазного потоку в просторі;
- б) визначити вплив відношення щільностей фаз та інших параметрів на характеристики змішування;
- в) з аналізу отриманих результатів знайти оптимальні режими змішування взаємно незмішуваних розглянутих рідин.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Аналіз відомих публікацій показав, що турбулентні струмені нанорідин за методами багатофазних потоків не розглядалися. Таким чином, застосований в роботі оригінальний метод динаміки багатофазних течій Накорчевського дозволив отримати нові цікаві результати. Тому актуальність завдання полягає у тому, щоб описати особливості змішування нанорідин для подальшого використання в наукових і прикладних роботах.

Результати дослідження

У цьому дослідженні як метод грануляції було обрано розпилювальне ліофілізаційне сушіння [7, 22]. З описаного вище нанопорошку було приготовано суспензію із вмістом твердих речовин 20 об.%. Приготування розпочалося з додавання води та кульок для розмелювання оксиду алюмінію в пляшку з поліетилену високої щільності місткістю 1000 мл. Деякі параметри матеріалів наведено в табл. 1 за даними [24].

Таблиця 1. Видима густина та густина після усяпання трьох порошків

Матеріали	Абсолютна видима густина (г/см ³)	Абсолютна густина після усяпання (г/см ³)
Нанопорошок	0,29±0,001	0,55±0,012
Мікропорошок	2,09±0,004	2,38±0,019
Гранульований порошок	0,46±0,006	0,56±0,007

Вода, оксид алюмінію, нанопорошок та мікропорошок, що розглядаються в статті, є наступними:

1. Нанопорошок оксиду алюмінію витікає з сопла в простір з водою, відношення щільностей $\rho_{21}=0,55/1=0,55$.

2. Мікропорошок тече з сопла в простір з водою $\rho_{21}=2,38/1=2,38$.

3. Навпаки, вода подається з сопла в нанопорошок та мікропорошок: $\rho_{21}=1/0,55=1,82$, $\rho_{21}=1/2,38=0,42$.

Істинна щільність – це співвідношення маси та об'єму (істинного об'єму) зразка, за винятком об'єму відкритих пор, закритих пор та міжчастинкових порожнин. Скелетна щільність: це відношення маси до об'єму (скелетного об'єму) частинок, за винятком як міжчастинкових порожнин, так і відкритих пор. Щільність після постукування: це щільність, виміряна механічним постукуванням по контейнеру з частинками для створення регулярної вібрації, яка переставляє частинки порошку. Вимірювання щільності після постукування зазвичай проводиться за допомогою вимірювача щільності після постукування. Насипна щільність: це щільність, виміряна після того, як частинки вільно заповнили стандартний контейнер за певних умов, тобто маса частинок на одиницю об'єму, коли вони нещільно упаковані [25].

Метод моделювання багатофазних турбулентних потоків

Параметри (щільність рідини, швидкість потоку, температура тощо) суміші в турбулентному багатофазному потоці розглядаються відповідно до методу, запропонованого професором Накорчевським [26], розробленого та описаного в багатьох публікаціях, наприклад, [26-31]. Аналог рівнянь Нав'є-Стокса в пограничному шарі було отримано в такому вигляді [26]:

$$\sum_{i=1}^m \left[\frac{\partial}{\partial x} (y \rho_i B_i u_i) + \frac{\partial}{\partial y} (y \rho_i B_i v_i) \right] = 0, \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^m \rho_i B_i (u_i \frac{\partial u_i}{\partial x} + v_i \frac{\partial u_i}{\partial y}) = -\frac{dp}{dx} + \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} \left[y \sum_{i=1}^m B_i \tau_i \right],$$

де $a^l(t) = \sum_{i=1}^m B_i(t) a_i^l(t)$, $\sum_{i=1}^m B_i = 1$. Функція-індикатор $B_i(t)$ введена для фаз

багатофазного потоку наступним чином: $B_1=1$, якщо в даній точці течії присутня тільки перша фаза, $B_2=0$. І навпаки, $B_1=0$, $B_2=1$ – якщо тільки друга фаза.

У стаціонарних рівняннях (1) для потоку нестисливих рідин, записаних у циліндричній системі координат, знаходяться: p – тиск, ρ – щільність, u, v – поздовжня та поперечна складові швидкості, τ – турбулентне напруження для i -ї фази. Всі параметри потоку усереднюються на характерному інтервалі за

вибраним часом. Індекс m належить значенням на осі потоку (осі симетрії). Функцію-індикатор фази в багатофазному потоці можна розглядати як математичне очікування, на відміну від інших багатофазних підходів [8–10], які базуються на введенні об'ємного питомого вмісту фази в багатофазному потоці. Тим не менш, використання функції-індикатора дозволяє обчислити об'ємний питомий вміст фаз, який був введений іншими багатофазними підходами. Розробка моделі двофазного струменя незмішуваних рідин виконана згідно з рис. 1. Схематичне зображення показано на рис. 2, де r_0 – радіус сопла, u_{01} – швидкість на зрізі сопла. Конічна поверхня 1 на рис. 1 є межею однорідного потенційного ядра a , внутрішній підшар b_1 містить рідину, що вводиться з оточуючого середовища, як дисперсну фазу, тоді як зовнішній підшар b_2 містить рідину, що виходить з сопла, як дисперсну фазу. Внутрішній та зовнішній підшари розділені поверхнею фазової інверсії 2; а поверхня 3 розділяє турбулентну та ламінарну зони потоку 3, яка є найбільш невизначеною; 4 – зовнішня конічна поверхня осесиметричної зони змішування (умовно гладка).

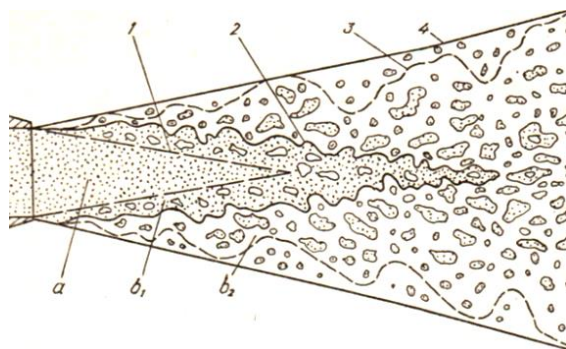


Рис. 1. Загальний вигляд багатофазного турбулентного струменя

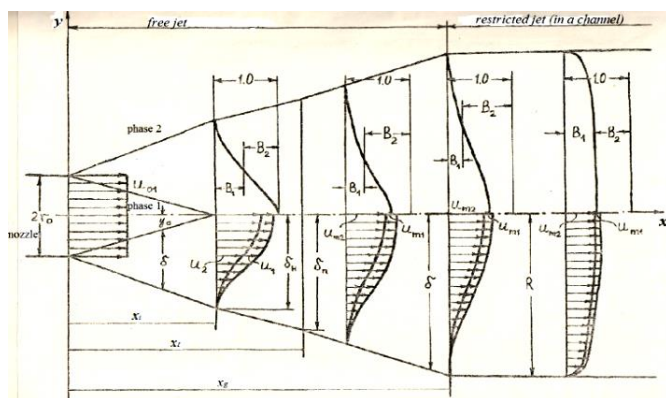


Рис. 2. Схема двофазного турбулентного струменя, обмеженого каналом при x_g

Структурна схема процесу змішування на рис. 2 спрощена: початкова частина довжини x_1 з приблизно лінійними межами для конічної поверхні (у циліндричній системі координат) внутрішнього ядра першої фази та зони змішування між внутрішньою та зовнішньою межами струменя. Турбулентна зона містить фрагменти фаз, оскільки незмішувани рідини мають поведінку,

подібну до окремих фаз, з їх міжфазними множинними поверхнями. Перша фаза в потенційному ядрі повністю витрачається в початковій частині зони змішування. Потім слідує коротка транзитна область. Після цього починається основна частина двофазного струменя, при цьому дві фази добре перемішані по всьому шару струменя. Зовнішня межа зони змішування визначається нульовою поздовжньою швидкістю другої фази та нульовою поперечною швидкістю першої фази (друга фаза всмоктується з нерухомого оточення в зону змішування). Індикатор функції першої фази $B_1(t)$ дорівнює нулю на зовнішній межі розділу, оскільки вона відсутня в навколишньому середовищі. Аналогічно, індикатор функції $B_2(t)$ дорівнює нулю на межі потенційного ядра, поверхні розділу першої фази, що витікає з сопла. У першому підході впливом маси, в'язких та капілярних сил нехтується.

З урахуванням вищезазначеного, граничні умови такі [1]:

$$\begin{aligned} y=y_0, \quad u_i = u_{0i}, \quad v_i=0, \quad \tau_i=0, \quad B_1=1, \quad \frac{\partial B_1}{\partial \eta} = 0; \\ y=y_0+\delta, \quad u_i = 0, \quad v_i=0, \quad \tau_i=0, \quad B_1=0. \end{aligned} \quad (2)$$

Залежність функції-індикатора B_1 від поздовжньої координати x вводиться через її другу похідну на межі струменя $y=y_0$: $\frac{\partial^2 B_1}{\partial \eta^2} = h(x)$.

Апроксимація профілів швидкості та функції-індикатора

Турбулентне напруження у фазі визначається «новою» формулою Прандтля $\tau_i = \rho_i \kappa_i \delta u_{mi} \frac{\partial u_i}{\partial y}$, де κ_i – коефіцієнт турбулентного перемішування для i -ї фази, δ – ширина шару перемішування. Поліноміальні наближення для профілів швидкості та інших функцій були отримані на основі граничних умов (2) [26–28], наприклад:

$$u_1 / u_{01} = 1 - 4\eta^3 + 3\eta^4, \quad u_2 / u_{02} = 1 - 6\eta^2 + 8\eta^3 - 3\eta^4, \quad (3), (4)$$

$$B_1 = B_1^{(0)} = 1 - \eta^3 + 0.5\eta^2(1-\eta)h(x), \quad h \in [-6, 0], \quad (5)$$

$$B_1 = B_1^{(1)} = 1 - 4\eta^3 + 3\eta^4 + 0.5\eta^2(1-\eta)^2 h(x), \quad h \in [-12, -6],$$

$$B_1 = B_1^{(2)} = 1 - 10\eta^3 + 15\eta^4 - 6\eta^5 + 0.5\eta^2(1-\eta)^3 h(x), \quad h \in [-20, -12],$$

де $\eta = (y - y_0) / \delta$. Функція $h(x) = \left(\frac{\partial^2 B_1}{\partial \eta^2} \right)_{\eta=0}$ відповідає за залежність функції-індикатора фаз B_1 від координати x , вона може змінюватися в діапазоні $h \leq 0$ через вимоги своєї природи. Перше наближення в (5) показує обмежене застосування в діапазоні $h \leq 0$, тоді як поза цією областю воно не задовольняє граничні умови (2) та умову $0 \leq B_1(\eta) \leq 1, \forall \eta \in [0, 1]$. Отже, всі наступні наближення $B_1(\eta)$ у (5) були отримані як перехід кусково-неперервної функції-індикатора $B_1^{(n)}$ до її наступного наближення за умови, що похідна по η відносно точки $\eta=1$ дорівнює нулю до $(n+1)$ -го порядку. Ці функції мають розриви в точках переходу постійної характеристичної функції $B_1^{(n)}(\eta, h)$ від одного інтервалу наближення до іншого (перша похідна має розрив у цих точках). Перше наближення $B_1(\eta)$ у (5) обмежене застосуванням в діапазоні $h \in [-6, 0]$, тоді як поза цією областю воно не задовольняє граничні умови (2) та умову $0 \leq B_1(\eta) \leq 1, \forall \eta \in [0, 1]$. Тому всі наступні наближення $B_1(\eta)$ у (5) були

отримані як перехід кусково-неперервної функції-індикатора $B_1^{(n)}$ до її наступного наближення за умови, що похідна відносно точки $\eta = 1$ дорівнює нулю до $(n+1)$ -го порядку. Ці функції мають розриви в точках переходу постійної характеристичної функції $B_1^{(n)}(\eta, h)$ від одного регіонального наближення до іншого (перша похідна має розрив у цих точках). Перевагою таких наближень є те, що всі функції $B_1^{(n)}$ плавно переходять з однієї області $h(x)$ до наступної. Кожна функція $B_1^{(n)}$ точно збігається з попередньою $B_1^{(n-1)}$ на межі спряження, де закінчується $B_1^{(n-1)}$ і починається $B_1^{(n)}$. Фізичний зміст варіативних наближень визначається залежністю розподілу фаз у шарі змішування від співвідношення густин фаз змішування: чим гущіша навколишня рідина, тим коротше проникнення першої, легшої фази, у шар змішування.

Недоліком вищезазначених наближень є зростаюча складність функцій $B_1^{(n)}$ в аналітичних розрахунках, з якою, тим не менш, легко боротися за допомогою сучасних комп'ютерних аналітичних розрахунків. Неможливо отримати загальне наближення для $B_1(\eta, h)$, що задовольняє граничні умови (2) у всьому діапазоні за параметром i_0 (через вимогу варіації B_1 від 0 до 1).

Поліноміальні наближення для u_2 , B_1 залишаються однаковими на початковій частині струменя, але для функції u_1 наближення таке:

$$u_1 / u_{m1} = 1 - 3\eta^2 + 2\eta^3. \quad (6)$$

Усі поліноміальні апроксимації (3)-(6) показано на рис. 3. Реальні профілі для багатофазного потоку представлені як добуток відповідного профілю, помножений на його функцію-індикатор.

Інтегральні рівняння для початкової ділянки струменя

На основі (3)-(5) було отримано інтегральні кореляції для двофазного турбулентного струменя [26, 27] шляхом інтегрування рівнянь збереження маси та імпульсу (1) з граничними умовами (2) для повного поперечного перерізу потоку $y=y_0+\delta$, а також збереження імпульсу для $y=y^*$ відповідно.

Математична модель в безрозмірній формі

Система рівнянь для початкової частини струменя перетворюється до наступної безрозмірної форми з масштабами r_0 , δ , u_{0i} для поздовжніх та поперечних координат і швидкості відповідно:

$$y_0^2 + 2\delta \sum_{j=1}^2 y_0^{2-j} \delta^{j-1} a_j = 1, \quad y_0^2 + 2\delta \sum_{j=1}^2 y_0^{2-j} \delta^{j-1} (a_{j+2} + i_0 b_{j+2}) = 1, \quad (7)$$

$$(1 - u_1^*) y_0 \frac{dy_0}{d\zeta} + \frac{d}{d\zeta} \delta \sum_{j=1}^2 y_0^{2-j} \delta^{j-1} (a_{j+2}^* + i_0 b_{j+2}^*) - \quad (8)$$

$$\frac{d}{d\zeta} \delta \sum_{j=1}^2 y_0^{2-j} \delta^{j-1} (a_j^* u_1^* + i_0 b_j^* u_2^*) = (y_0 + \delta \eta^*) \sum_{j=1}^2 B_j^* \left(\frac{\partial u_j}{\partial \eta} \right)^* (i_0 \kappa_{21})^{j-1}.$$

Тут: $\bar{y}_0 = y_0 / r_0$, $\bar{\delta} = \delta / r_0$, $\eta = (y - y_0) / \delta$, $\bar{x} = x / r_0$, $\zeta = \kappa_1 \bar{x}$,
 $s_0 = u_{02} / u_{01}$, $i_0 = ns_0^2$, $n = \rho_2 / \rho_1$, $\kappa_{21} = \kappa_2 / \kappa_1$, $a_i = a_{i1} + a_{i2}h$,
 $b_i = b_{i1} + b_{i2}h$, $a_i = \int_0^1 B_1 \bar{u}_1 \eta^{j-1} d\eta$, $b_i = \int_0^1 B_2 \bar{u}_2 \eta^{j-1} d\eta$ ($i=1, 2$);
 $a_i = \int_0^1 B_1 \bar{u}_1^2 \eta^{j-1} d\eta$, $b_i = \int_0^1 B_2 \bar{u}_2^2 \eta^{j-1} d\eta$ ($i=3, 4$); $j=1, 2$.

Розраховані значення інтегральних параметрів у (7), (8) були виконані в діапазоні зміни функції $h(x)$ відповідно до апроксимації профілів швидкості (3), (4) та функції-індикатора фази B_1 (5). Як показано нижче, область параметра $h(x)$ переважно покривається у (5) для достатньо широкого співвідношення густин змішуваних рідких фаз. Коефіцієнти a_{ij} , b_{ij} , згідно з (11), (3)-(5), представлені в табл. 2 та табл. 3.

Таблиця 2. Інтегральні параметри a_{ij} моделі для різних областей функції-індикатора B_1

a_{ij} для h :	a_{11}	a_{12}	a_{21}	a_{22}	a_{31}	a_{32}	a_{41}	a_{42}
$h \in [0, -6]$	0.5464	0.0208	0.1667	0.0101	0.4604	0.0139	0.1198	0.0059
$[-6, -12]$	0.4857	0.0107	0.1333	0.0046	0.4250	0.0080	0.1027	0.0030
$[-12, -20]$	0.4310	0.0062	0.1065	0.0023	0.3884	0.0049	0.0866	0.0017
$[-20, -30]$	0.3844	0.0038	0.0859	0.00013	0.3542	0.0032	0.0728	0.0010

Таблиця 3. Інтегральні параметри b_{ij} моделі для різних областей функції-індикатора B_1

b_{ij} для h	b_{11}	b_{12}	b_{21}	b_{22}	b_{31}	b_{32}	b_{41}	b_{42}
$h \in [0, -6]$	0.0179	-0.0101	0.0095	-0.0042	0.0054	-0.0048	0.0023	-0.0016
$[-6, -12]$	0.0429	-0.0060	0.0214	-0.0022	0.0149	-0.0032	0.0059	- 0.00097
$[-12, -20]$	0.0690	-0.0038	0.0327	-0.0012	0.0625	-0.0023	0.0098	- 0.00062
$[-20, -30]$	0.0939	-0.0025	0.0424	- 0.00076	0.0390	-0.0016	0.0141	- 0.00042

Інтегральну кореляцію для частини шару змішування в системі (10) розглядали при $\eta = 0.5$. Відповідні коефіцієнти a_{ij}^* , b_{ij}^* для цієї середньої ділянки шару змішування наведено в табл. 4 та 5.

Таблиця 4. Інтегральні параметри a_{ij}^* моделі для різних областей функції-індикатора B_1

a_{ij}^* для h :	a_{11}^*	a_{12}^*	a_{21}^*	a_{22}^*	a_{31}^*	a_{32}^*	a_{41}^*	a_{42}^*
$h \in [0, -6]$	0.4436	0.0110	0.1029	0.0038	0.4103	0.0094	0.0902	0.0032
$[-6, -12]$	0.4206	0.0071	0.0941	0.0024	0.3912	0.0062	0.0831	0.0020
$[-12, -20]$	0.3920	0.0062	0.0836	0.0015	0.3673	0.0042	0.0745	0.0012
$[-20, -30]$	0.3619	0.0033	0.0730	0.00097	0.3416	0.0029	0.0657	0.00084

Таблиця 5. Інтегральні параметри b_{ij}^* моделі для різних областей функції-індикатора B_1

b_{ij}^* для h :	b_{11}^*	b_{12}^*	b_{21}^*	b_{22}^*	b_{31}^*	b_{32}^*	b_{41}^*	b_{42}^*
$h \in [0, -6]$	0.0075	-0.0142	0.0028	-0.0047	0.0039	-0.0085	0.0014	-0.0025
$[-6, -12]$	0.0214	-0.0048	0.0079	-0.0015	0.0114	-0.0030	0.0039	- 0.00083
$[-12, -20]$	0.0392	-0.0033	0.0141	- 0.00096	0.0214	-0.0022	0.0071	- 0.00057
$[-20, -30]$	0.0585	-0.0023	0.0206	- 0.00064	0.0328	-0.0016	0.0106	- 0.00039

Окрім вищезазначеного, для безрозмірних параметрів ми зберігаємо ті ж позначення, що й для розмірних. Тільки в (11) це зазначено для уточнення безрозмірних позначень. Коефіцієнт ковзання s_0 вважається постійним. Граничні умови (2) для (11) перетворюються як

$$\zeta=0, y_0=1, \delta=0; \quad \zeta=\zeta_i, y_0=0, \delta=\delta_i; \quad (9)$$

де ζ_i, δ_i – безрозмірна довжина струменя та його максимальний радіус (в кінці початкової ділянки). Характеристики $y_0(\zeta), \delta(\zeta), h(\zeta)$ обчислюються з (8), (9). Потім усі інші отримуються для заданих значень основних параметрів: i_0, κ_1, κ_2 . Перший параметр є дещо невизначеним через труднощі з оцінкою ковзання фаз, тоді як два інші відомі з експериментальних досліджень для конкретних умов. Основною проблемою перевірки математичної моделі на відповідність експериментальним даним є правильна оцінка коефіцієнтів турбулентного перемішування κ_1, κ_2 у кожному конкретному випадку. Але перевагою моделі є можливість мати всі характеристики потоку разом з їх належністю до певної фази через функції B_1, B_2 . Так, обчислюються розподіл поперечних швидкостей, взаємодії на межі розділу, коефіцієнтів об'ємного q та масового розходу g , а також кінетичної енергії e_i для фаз у потоці [26].

Для короткої перехідної частини струменя немає розробленої обґрунтованої схеми, тому вона тут не розглядається. Основна частина струменя розглядається після короткої перехідної частини. Метод добре розроблений та підтверджений експериментальними даними [26]. Безрозмірна система рівнянь (8), (9) для основної частини також представлена в [26].

Розв'язання крайової задачі для початкової ділянки струменевої течії

Розв'язок крайової задачі (8), (9) дозволяє отримати параметри для початкової частини струменя за заданими значеннями параметрів i_0, κ_{21} . Причому, якщо перший параметр задається відповідно до відношення густини змішуваних рідин (може тільки ще залежати від невідомого ковзання фаз s_0), то варіювання в обчисленнях відношення коефіцієнтів турбулентного змішування κ_{21} означає різні можливі рідини. Обчислювальні експерименти виявили основні особливості потоку. Зазначено розподіли швидкостей для фаз (u_1, u_2) та функцій-індикаторів фаз (V_1, V_2), а також значення параметрів у поперечному перерізі сопла. Система (8) містить два алгебраїчних та одне диференціальне рівняння. З алгебраїчних рівнянь отримують функції $y_0(h), \delta(h)$, а потім диференціальне рівняння виражається у стандартній формі

$$dh/d\zeta = F(h(\zeta), i_0, \kappa_{21}),$$

для чисельного розв'язку.

Систему рівнянь можна розв'язати чисельно в загальному випадку, але ми застосовували декілька різних методів для отримання більш детальної картини фізичних явищ, для більш повного розуміння основних характеристик системи, з максимально можливою кількістю аналітичних виразів, що показують явні функції. Діапазон зміни функції $h(\zeta)$ визначається підстановкою граничних умов у функції $y_0(h), \delta(h)$, таким чином ми отримуємо наступне:

$$h_0 = h(0) = \frac{a_{11} - a_{31} - i_0 b_{31}}{a_{32} - a_{12} + i_0 b_{32}}, \quad h_i = h(\zeta_i) = \frac{a_{21} - a_{41} - i_0 b_{41}}{a_{42} - a_{22} + i_0 b_{42}}. \quad (10)$$

Функції $h_0(i_0), h_i(i_0)$ у (10) мають розриви в точках переходу постійної функції $V_1(\eta, h)$ від одного діапазону наближення до іншого (перша похідна має розрив у цих точках). Результати комп'ютерного моделювання представлені нижче.

Розповсюдження струменя мікропорошку алюмінію у басейні з водою

Для цього випадку відношення густини дорівнює 2,38. Розрахунки велись для співвідношення змінних коефіцієнтів турбулентного перемішування в діапазоні від 0,1 до 10. Деякі результати розрахунків представлені на рис. 4, 5.

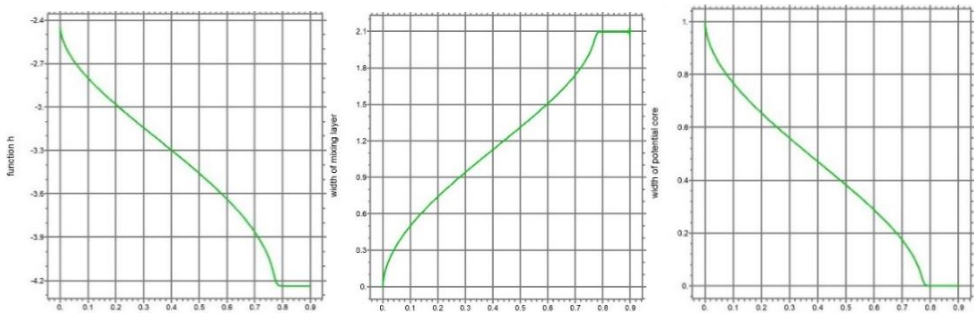


Рис. 4. Струмień мікропорошку алюмінію у басейні з водою. Функції $h(\zeta), \delta(\zeta), y_0(\zeta)$ by $i_0=2.38, \kappa_{21}=0.5; \zeta = \kappa_1 \bar{x}$

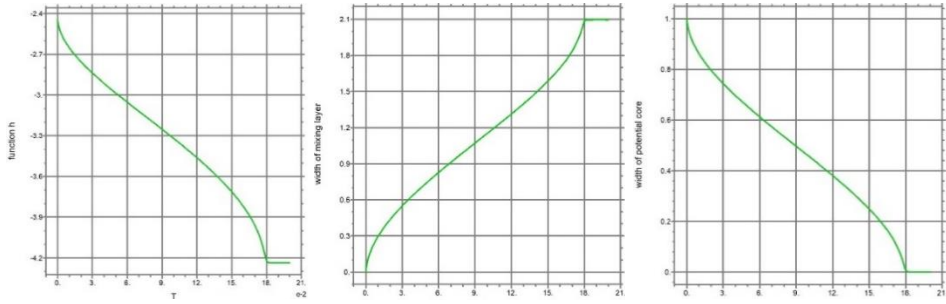


Рис. 5. Струмінь мікропорошку алюмінію у басейні з водою. Функції $h(\zeta)$, $\delta(\zeta)$, $y_0(\zeta)$ by $i_0=2.38$, $\kappa_{21}=5.0$; $\zeta = \kappa_1 \bar{x}$

Струмінь води в басейні алюмінієвого нанопорошку

Мікро- і нанопорошки поведуться як рідини в русі. Турбулентний струмінь води, що поширюється в просторі нанопорошку, досліджувався з коефіцієнтом густини, зазначеним вище, 1,82. Деякі результати розрахунків для варійованих значень коефіцієнтів турбулентного змішування зі співвідношенням від 0,1 до 5,0 можна побачити на рис. 6, 7.

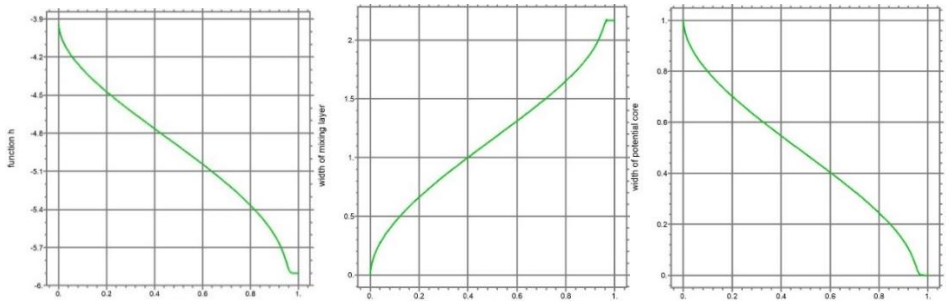


Рис. 6. Струмінь води у басейні алюмінієвого нанопорошку. Functions $h(\zeta)$, $\delta(\zeta)$, $y_0(\zeta)$ by $i_0=1.82$, $\kappa_{21}=0.5$; $\zeta = \kappa_1 \bar{x}$

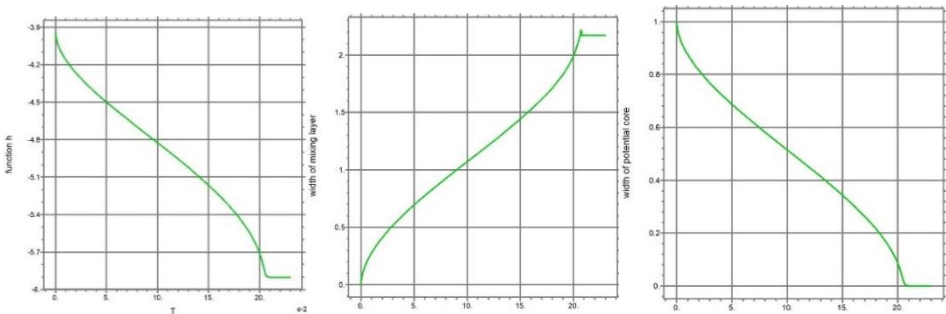


Рис. 7. Струмінь води у басейні алюмінієвого нанопорошку. Functions $h(\zeta)$, $\delta(\zeta)$, $y_0(\zeta)$ by $i_0=1.82$, $\kappa_{21}=5.0$; $\zeta = \kappa_1 \bar{x}$

Струмінь води в мікропорошку алюмінію

Турбулентний струмінь води, що поширюється в середовищі мікропорошку Al, досліджувався з коефіцієнтом щільності, зазначеним вище, 0,42. Результати для різних значень коефіцієнтів турбулентного змішування зі співвідношенням від 0,1 до 5,0 можна побачити на рис. 8, 9.

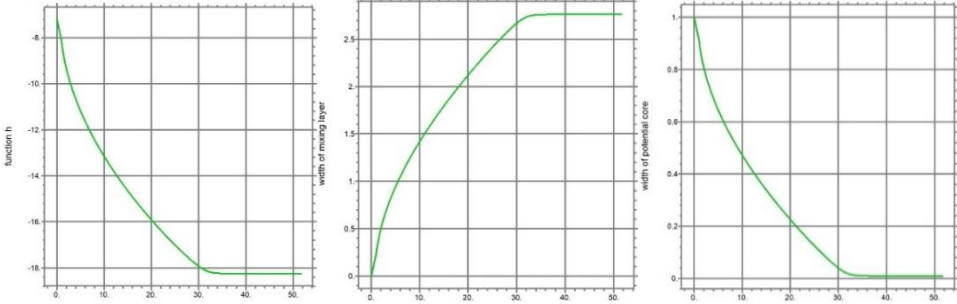


Рис. 8. Струмінь води у басейні алюмінієвого мікропорошку. Functions $h(\zeta)$, $\delta(\zeta)$, $y_0(\zeta)$ by $i_0=0.42$, $\kappa_{21}=5.0$

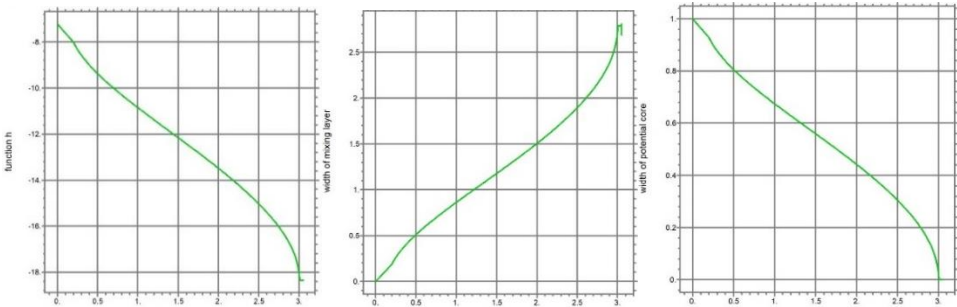


Рис. 9. Струмінь води у басейні алюмінієвого мікропорошку. Functions $h(\zeta)$, $\delta(\zeta)$, $y_0(\zeta)$ by $i_0=0.42$, $\kappa_{21}=5.0$

Струмінь нанопорошку алюмінію у воді

Турбулентний струмінь нанопорошку алюмінію, що поширюється у воді, досліджувався з коефіцієнтом щільності 0,55, як зазначено вище. Два результати для різних значень коефіцієнтів турбулентного змішування зі співвідношенням від 0,1 до 5,0 можна побачити на рис. 10, 11.

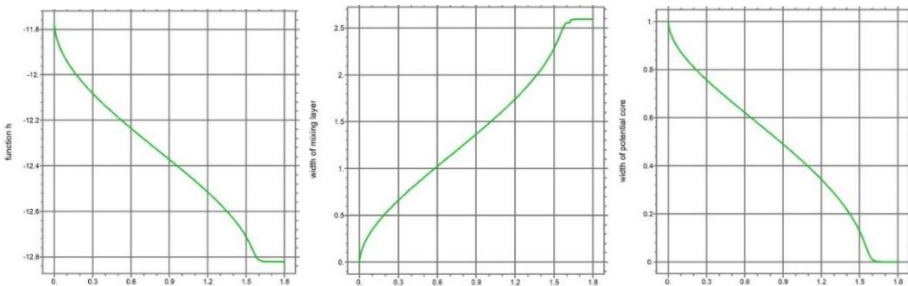


Рис. 10. Струмінь нанопорошку алюмінію у воді. Functions $h(\zeta)$, $\delta(\zeta)$, $y_0(\zeta)$ by $i_0=0.55$, $\kappa_{21}=0.5$

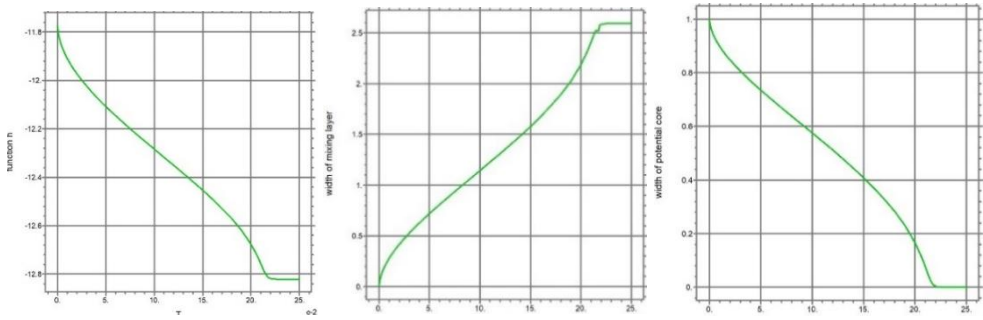


Рис. 11. Струмінь води у басейні алюмінієвого мікропорошку. Functions $h(\zeta)$, $\delta(\zeta)$, $y_0(\zeta)$ by $i_0=0.55$, $\kappa_{21}=5.0$

Висновки та перспективи подальших досліджень

Сформульовано інтегральну модель на основі фазових індикаторів для осесиметричних турбулентних струменів двох незмішуваних рідин з контрастом їх щільностей. Ця модель розширює класичну теорію гетерогенних струменів, включаючи фазово-роздільний перенос імпульсу, зберігаючи при цьому аналітичну простежуваність. Класична поведінка турбулентних струменів відновлюється в межі однієї щільності, тоді як контраст щільностей призводить до систематичних відхилень, зумовлених інерційним дисбалансом. На основі результатів моделювання для представлених нано- та мікропорошків алюмінію та їх струменевого потоку з водою можна розглянути оптимальний режим змішування порошоків з водою. Це корисно для розуміння особливостей змішування та теплопередачі, розрахунку необхідної концентрації порошку у воді та характеристик масо- та теплопередачі. Метод моделювання гетерогенних струменів взаємно незмішуваних рідин вперше застосовано для опису турбулентного струминного змішування нанорідин, що в майбутньому буде розповсюджено також на інші раніше невідомі випадки для встановлення важливих особливостей.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. ASTM International. (2015). *ISO/ASTM 52900:2015 additive manufacturing—General principles—Terminology*. ASTM International.
2. Du, W., Ren, X., Pei, Z., & Ma, C. (2020). Ceramic binder jetting additive manufacturing: A literature review on density. *Journal of Manufacturing Science and Engineering*, 142(4), 1–66. <https://doi.org/10.1016/j.ceramint.2020.03.280>
3. Li, M., Du, W., Elwany, A., Pei, Z., & Ma, C. (2020). Metal binder jetting additive manufacturing: A literature review. *Journal of Manufacturing Science and Engineering*, 142(9), 1–45. <https://doi.org/10.1115/1.4047430>
4. Qian, C., & Sun, J. (2013). Fabrication of the porous hydroxyapatite implant by 3D printing. *Journal of Ceramic Processing Research*, 14(4), 513–516. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-49514-8>
5. Tarafder, S., Davies, N. M., Bandyopadhyay, A., & Bose, S. (2013). 3D printed tricalcium phosphate bone tissue engineering scaffolds: Effect of SrO and MgO doping on in vivo osteogenesis in a rat distal femoral defect model. *Biomaterials Science*, 1(12), 1250–1259. <https://doi.org/10.1039/C3BM60132C>

6. Tarafder, S., Dernell, W. S., Bandyopadhyay, A., & Bose, S. (2015). SrO- and MgO-doped microwave sintered 3D printed tricalcium phosphate scaffolds: Mechanical properties and in vivo osteogenesis in a rabbit model. *Journal of Biomedical Materials Research Part B: Applied Biomaterials*, 103(3), 679–690. <https://doi.org/10.1002/jbm.b.33239>
7. Miao, G., Du, W., Moghadasi, M., Pei, Z., & Ma, C. (2020). Ceramic binder jetting additive manufacturing: Effects of granulation on properties of feedstock powder and printed and sintered parts. *Additive Manufacturing*, 36, Article 101542. <https://doi.org/10.1016/j.addma.2020.101542>
8. Bai, Y., Wagner, G., & Williams, C. B. (2015). Effect of bimodal powder mixture on powder packing density and sintered density in binder jetting of metals. In *Proceedings of the International Solid Freeform Fabrication Symposium* (pp. 758–771). Austin, TX.
9. Butscher, A., Bohner, M., Roth, C., Ernstberger, A., Heuberger, R., Doebelin, N., Rudolf Von Rohr, P., & Müller, R. (2012). Printability of calcium phosphate powders for three-dimensional printing of tissue engineering scaffolds. *Acta Biomaterialia*, 8(1), 373–385. <https://doi.org/10.1016/j.actbio.2011.08.027>
10. Zocca, A., Gomes, C. M., Bernardo, E., Muller, R., Gunster, J., & Colombo, P. (2013). LAS glass-ceramic scaffolds by three-dimensional printing. *Journal of the European Ceramic Society*, 33(9), 1525–1533. <https://doi.org/10.1016/j.jeurceramsoc.2012.12.012>
11. Lanzetta, M., & Sachs, E. (2001). The line formation with alumina powders in drop on demand three-dimensional printing. In *Proceedings of the First International Seminar on Progress in Innovative Manufacturing Engineering* (pp. 197–204). Sestri Levante.
12. Sun, C., Tian, X., Wang, L., Liu, Y., Wirth, C. M., Günster, J., Li, D., & Jin, Z. (2017). Effect of particle size gradation on the performance of glass-ceramic 3D printing process. *Ceramics International*, 43(1), 578–584. <https://doi.org/10.1016/j.ceramint.2016.09.197>
13. Du, W., Ren, X., Chen, Y., Ma, C., Radovic, M., & Pei, Z. (2018). Model guided mixing of ceramic powders with graded particle sizes in binder jetting additive manufacturing. In *ASME 2018 13th International Manufacturing Science and Engineering Conference* (pp. 1–9). College Station, TX. <https://doi.org/10.1115/MSEC2018-6651>
14. Du, W., Roa, J., Hong, J., Liu, Y., Pei, Z., & Ma, C. (2021). Binder jetting additive manufacturing: Effect of particle size distribution on density. *Journal of Manufacturing Science and Engineering*, 143(9), 091002_1–091002_26. <https://doi.org/10.1115/1.4050306>
15. Suwanprateeb, J., Sanngam, R., & Panyathanmaporn, T. (2010). Influence of raw powder preparation routes on properties of hydroxyapatite fabricated by 3D printing technique. *Materials Science and Engineering C*, 30(4), 610–617. <https://doi.org/10.1016/j.msec.2010.02.014>
16. Irsen, S. H., Leukers, B., Höckling, C., Tille, C., & Seitz, H. (2006). Bioceramic granulates for use in 3D printing: Process engineering aspects. *Materialwissenschaft und Werkstofftechnik*, 37(6), 533–537. <https://doi.org/10.1002/mawe.200600033>
17. Gildenhaar, R., Knabe, C., Gomes, C., Linow, U., Houshmand, A., & Berger, G. (2011). Calcium alkaline phosphate scaffolds for bone regeneration 3D-fabricated by additive manufacturing. *Key Engineering Materials*, 493–494, 849–854. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/KEM.493-494.849>
18. Ben, Y., Zhang, L., Wei, S., Zhou, T., Li, Z., Yang, H., Wang, Y., Selim, F. A., Wong, C., & Chen, H. (2017). PVB modified spherical granules of β -TCP by spray drying for 3D ceramic printing. *Journal of Alloys and Compounds*, 721, 312–319. <https://doi.org/10.1016/j.jallcom.2017.05.008>
19. Seitz, H., Deisinger, U., Leukers, B., Detsch, R., & Ziegler, G. (2009). Different calcium phosphate granules for 3-D printing of bone tissue engineering scaffolds. *Advanced Engineering Materials*, 11(5), 41–46. <https://doi.org/10.1002/adem.200800334>
20. Cox, S. C., Thornby, J. A., Gibbons, G. J., Williams, M. A., & Mallick, K. K. (2015). 3D printing of porous hydroxyapatite scaffolds intended for use in bone tissue engineering applications. *Materials Science and Engineering C*, 47, 237–247. <https://doi.org/10.1016/j.msec.2014.11.024>

21. Chumnanklang, R., Panyathanmaporn, T., Sitthiseripratip, K., & Suwanprateeb, J. (2007). 3D printing of hydroxyapatite: Effect of binder concentration in pre-coated particle on part strength. *Materials Science and Engineering C*, 27(4), 914–921. <https://doi.org/10.1016/j.msec.2006.11.004>
22. Du, W., Miao, G., Liu, L., Pei, Z., & Ma, C. (2019). Binder jetting additive manufacturing of ceramics: Feedstock powder preparation by spray freeze granulation. In *ASME 2019 14th International Manufacturing Science and Engineering Conference* (pp. 1–6). Erie, PA. <https://doi.org/10.1115/MSEC2019-3001>
23. Du, W., Miao, G., Liu, L., Pei, Z., & Ma, C. (2019). Binder jetting additive manufacturing of ceramics: Comparison of flowability and sinterability between raw and granulated powders. In *ASME 2019 14th International Manufacturing Science and Engineering Conference* (pp. 1–8). Erie, PA. <https://doi.org/10.1115/MSEC2019-2983>
24. Domiri Ganji, D., Mahboobtosi, M., & Nadalinia Chari, F. (2025). Nonlinear radiation in entropy generation MHD flow of penta-hybrid nanofluids: Effects of variable thermal conductivity, viscous dissipation and nonlinear convection. *Journal of Radiation Research and Applied Sciences*, 18(2), Article 101524. <https://doi.org/10.1016/j.jrras.2025.101524>
25. Jalili, B., Majidi Zar, P., Liu, D., Ji, C.-H., Jalili, P., Abdelmohimen, M. A. H., & Domiri Ganji, D. (2024). Thermal study of MHD hybrid nanofluids confined between two parallel sheets: Shape factors analysis. *Case Studies in Thermal Engineering*, 63, Article 105229. <https://doi.org/10.1016/j.csite.2024.105229>
26. Накорчевский, А.И. (1980). *Гетерогенные турбулентные струи*. Киев: Наукова думка.
27. Накорчевский, А.И., & Казачков, И.В. (1979). Расчет неоднородной турбулентной струи. В кн.: *Системы автоматизации непрерывных технологических процессов* (pp. 68-79). Институт кибернетики НАНУ.
28. Kazachkov, I. (2025). *Turbulent two-phase jets of mutually immiscible liquids: Mixing and heat transfer*. Cambridge Scholars Publishing.
29. Kazachkov, I. V. (2018). Approaches for mathematical modeling and experimental study of the turbulent flows of mutually immiscible liquids (oil-water). *International Journal of Petroleum and Petrochemical Engineering*, 4(1), 70–81. <https://doi.org/10.20431/2454-7980.0401008>
30. Казачков, И.В. (1980). Математическое моделирование неоднородных турбулентных струй в цилиндрической камере. *Автоматика*, 13, 1-6.
31. Накорчевский, А.И., & Басок, Б.И. (2001). *Гидродинамика и теплопередача в гетерогенных системах и устройствах пульсирующего типа*. Киев: Наукова Думка.

Стаття надійшла до редакції 17.02.2026, надійшла після рецензування 23.03.2026, прийнята 22.04.2026

REFERENCES

1. ASTM International. (2015). *ISO/ASTM 52900:2015 additive manufacturing—General principles—Terminology*. ASTM International.
2. Du, W., Ren, X., Pei, Z., & Ma, C. (2020). Ceramic binder jetting additive manufacturing: A literature review on density. *Journal of Manufacturing Science and Engineering*, 142(4), 1–66. <https://doi.org/10.1016/j.ceramint.2020.03.280>
3. Li, M., Du, W., Elwany, A., Pei, Z., & Ma, C. (2020). Metal binder jetting additive manufacturing: A literature review. *Journal of Manufacturing Science and Engineering*, 142(9), 1–45. <https://doi.org/10.1115/1.4047430>
4. Qian, C., & Sun, J. (2013). Fabrication of the porous hydroxyapatite implant by 3D printing. *Journal of Ceramic Processing Research*, 14(4), 513–516. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-49514-8>

5. Tarafder, S., Davies, N. M., Bandyopadhyay, A., & Bose, S. (2013). 3D printed tricalcium phosphate bone tissue engineering scaffolds: Effect of SrO and MgO doping on in vivo osteogenesis in a rat distal femoral defect model. *Biomaterials Science*, 1(12), 1250–1259. <https://doi.org/10.1039/C3BM60132C>
6. Tarafder, S., Dernell, W. S., Bandyopadhyay, A., & Bose, S. (2015). SrO- and MgO-doped microwave sintered 3D printed tricalcium phosphate scaffolds: Mechanical properties and in vivo osteogenesis in a rabbit model. *Journal of Biomedical Materials Research Part B: Applied Biomaterials*, 103(3), 679–690. <https://doi.org/10.1002/jbm.b.33239>
7. Miao, G., Du, W., Moghadasi, M., Pei, Z., & Ma, C. (2020). Ceramic binder jetting additive manufacturing: Effects of granulation on properties of feedstock powder and printed and sintered parts. *Additive Manufacturing*, 36, Article 101542. <https://doi.org/10.1016/j.addma.2020.101542>
8. Bai, Y., Wagner, G., & Williams, C. B. (2015). Effect of bimodal powder mixture on powder packing density and sintered density in binder jetting of metals. In *Proceedings of the International Solid Freeform Fabrication Symposium* (pp. 758–771). Austin, TX.
9. Butscher, A., Bohner, M., Roth, C., Ernstberger, A., Heuberger, R., Doebelin, N., Rudolf Von Rohr, P., & Müller, R. (2012). Printability of calcium phosphate powders for three-dimensional printing of tissue engineering scaffolds. *Acta Biomaterialia*, 8(1), 373–385. <https://doi.org/10.1016/j.actbio.2011.08.027>
10. Zocca, A., Gomes, C. M., Bernardo, E., Muller, R., Gunster, J., & Colombo, P. (2013). LAS glass-ceramic scaffolds by three-dimensional printing. *Journal of the European Ceramic Society*, 33(9), 1525–1533. <https://doi.org/10.1016/j.jeurceramsoc.2012.12.012>
11. Lanzetta, M., & Sachs, E. (2001). The line formation with alumina powders in drop on demand three-dimensional printing. In *Proceedings of the First International Seminar on Progress in Innovative Manufacturing Engineering* (pp. 197–204). Sestri Levante.
12. Sun, C., Tian, X., Wang, L., Liu, Y., Wirth, C. M., Günster, J., Li, D., & Jin, Z. (2017). Effect of particle size gradation on the performance of glass-ceramic 3D printing process. *Ceramics International*, 43(1), 578–584. <https://doi.org/10.1016/j.ceramint.2016.09.197>
13. Du, W., Ren, X., Chen, Y., Ma, C., Radovic, M., & Pei, Z. (2018). Model guided mixing of ceramic powders with graded particle sizes in binder jetting additive manufacturing. In *ASME 2018 13th International Manufacturing Science and Engineering Conference* (pp. 1–9). College Station, TX. <https://doi.org/10.1115/MSEC2018-6651>
14. Du, W., Roa, J., Hong, J., Liu, Y., Pei, Z., & Ma, C. (2021). Binder jetting additive manufacturing: Effect of particle size distribution on density. *Journal of Manufacturing Science and Engineering*, 143(9), 091002_1–091002_26. <https://doi.org/10.1115/1.4050306>
15. Suwanprateeb, J., Sanngam, R., & Panyathanmaporn, T. (2010). Influence of raw powder preparation routes on properties of hydroxyapatite fabricated by 3D printing technique. *Materials Science and Engineering C*, 30(4), 610–617. <https://doi.org/10.1016/j.msec.2010.02.014>
16. Irsen, S. H., Leukers, B., Höckling, C., Tille, C., & Seitz, H. (2006). Bioceramic granulates for use in 3D printing: Process engineering aspects. *Materialwissenschaft und Werkstofftechnik*, 37(6), 533–537. <https://doi.org/10.1002/mawe.200600033>
17. Gildenhaar, R., Knabe, C., Gomes, C., Linow, U., Houshmand, A., & Berger, G. (2011). Calcium alkaline phosphate scaffolds for bone regeneration 3D-fabricated by additive manufacturing. *Key Engineering Materials*, 493–494, 849–854. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/KEM.493-494.849>
18. Ben, Y., Zhang, L., Wei, S., Zhou, T., Li, Z., Yang, H., Wang, Y., Selim, F. A., Wong, C., & Chen, H. (2017). PVB modified spherical granules of β -TCP by spray drying for 3D ceramic printing. *Journal of Alloys and Compounds*, 721, 312–319. <https://doi.org/10.1016/j.jallcom.2017.05.008>
19. Seitz, H., Deisinger, U., Leukers, B., Detsch, R., & Ziegler, G. (2009). Different calcium phosphate granules for 3-D printing of bone tissue engineering scaffolds. *Advanced Engineering Materials*, 11(5), 41–46. <https://doi.org/10.1002/adem.200800334>

20. Cox, S. C., Thornby, J. A., Gibbons, G. J., Williams, M. A., & Mallick, K. K. (2015). 3D printing of porous hydroxyapatite scaffolds intended for use in bone tissue engineering applications. *Materials Science and Engineering C*, 47, 237–247. <https://doi.org/10.1016/j.msec.2014.11.024>
21. Chumnanklang, R., Panyathanmaporn, T., Sitthiseripratip, K., & Suwanprateeb, J. (2007). 3D printing of hydroxyapatite: Effect of binder concentration in pre-coated particle on part strength. *Materials Science and Engineering C*, 27(4), 914–921. <https://doi.org/10.1016/j.msec.2006.11.004>
22. Du, W., Miao, G., Liu, L., Pei, Z., & Ma, C. (2019). Binder jetting additive manufacturing of ceramics: Feedstock powder preparation by spray freeze granulation. In *ASME 2019 14th International Manufacturing Science and Engineering Conference* (pp. 1–6). Erie, PA. <https://doi.org/10.1115/MSEC2019-3001>
23. Du, W., Miao, G., Liu, L., Pei, Z., & Ma, C. (2019). Binder jetting additive manufacturing of ceramics: Comparison of flowability and sinterability between raw and granulated powders. In *ASME 2019 14th International Manufacturing Science and Engineering Conference* (pp. 1–8). Erie, PA. <https://doi.org/10.1115/MSEC2019-2983>
24. Domiri Ganji, D., Mahboobtosi, M., & Nadalinia Chari, F. (2025). Nonlinear radiation in entropy generation MHD flow of penta-hybrid nanofluids: Effects of variable thermal conductivity, viscous dissipation and nonlinear convection. *Journal of Radiation Research and Applied Sciences*, 18(2), Article 101524. <https://doi.org/10.1016/j.jrras.2025.101524>
25. Jalili, B., Majidi Zar, P., Liu, D., Ji, C.-H., Jalili, P., Abdelmohimen, M. A. H., & Domiri Ganji, D. (2024). Thermal study of MHD hybrid nanofluids confined between two parallel sheets: Shape factors analysis. *Case Studies in Thermal Engineering*, 63, Article 105229. <https://doi.org/10.1016/j.csite.2024.105229>
26. Nakorchevski, A. I. (1980). *Heterogeneous turbulent jets*. Naukova Dumka. [in Ukrainian]
27. Nakorchevski, A. I., & Kazachkov, I. V. (1979). Calculation of the heterogeneous turbulent jet. In *Systems of automation of continuous technological processes* (pp. 68–79). Institute of Cybernetics of NASU. [in Ukrainian]
28. Kazachkov, I. (2025). *Turbulent two-phase jets of mutually immiscible liquids: Mixing and heat transfer*. Cambridge Publishing.
29. Kazachkov, I. V. (2018). Approaches for mathematical modeling and experimental study of the turbulent flows of mutually immiscible liquids (oil-water). *International Journal of Petroleum and Petrochemical Engineering*, 4(1), 70–81. <https://doi.org/10.20431/2454-7980.0401008>
30. Kazachkov, I. V. (1980). Mathematical modelling of heterogeneous turbulent jets in cylindrical chamber. *Soviet Automatic Control*, 13, 1–6. [in Ukrainian]
31. Nakorchevski, A. I., & Basok, B. I. (2001). *Hydrodynamics and heat transfer in heterogeneous systems and devices of pulsating type*. Naukova Dumka. [in Ukrainian]

The article was received 17.02.2026, received after revision 23.03.2026, accepted 22.04.2026

Казачков Іван Васильович

д-р техн. наук, професор, завідувач кафедри, Ніжинський державний університет імені Миколи Гоголя

Адреса робоча: 16602, Україна, м. Ніжин, вул. Графська, 2

ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0001-9645-563X> **e-mail:** kazachkov.iv@ndu.edu.ua

Нестеренко Олександр Васильович

доктор технічних наук, професор, провідний науковий співробітник, Інститут телекомунікацій і глобального інформаційного простору Національної академії наук України

Адреса робоча: 03186, Україна, м. Київ, Чоколівський бульвар, 13

ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0001-5329-889X> **e-mail:** aleksandrnesterenkoua@gmail.com