УДК 519.872

ПОРІВНЯННЯ СИСТЕМ ТИПУ M/M/1 З ШВИДКИМ ПОВЕРНЕННЯМ ЗАЯВОК ПРИ РІЗНИХ ДИСЦИПЛІНАХ ОБСЛУГОВУВАННЯ

О.В. КОБА, К.В. МИХАЛЕВИЧ

Проведено порівняння класичної системи M/M/1 з поверненням і системи M/M/1 з циклічним чеканням в режимі швидкого повернення з орбіти. Для обґрунтованого порівняння зазначених систем доведено теорему.

Системи масового обслуговування (СМО), в яких заявки, що надійшли в систему при зайнятості всіх каналів обслуговування і всіх місць чекання, можуть повертатися для обслуговування після деякого періоду часу, називаються СМО з поверненням (повторенням) заявок (retrial queue). За останні два десятиліття теорія СМО з поверненням заявок набула значного розвитку [1–3].

Загальна модель СМО з поверненням заявок описується в роботі [1]. Маємо СМО зі вхідним потоком, час між заявками якого розподілений за законом $A(x)$. Система має s ($s \geq 1$) ідентичних незалежних каналів обслуговування. Час обслуговування для всіх каналів — випадкова величина з функцією розподілу $B(x)$. В системі існує $m-s$ ($m \geq s$) місць чекання. При наявності вільних каналів обслуговування заявку, що надійшла, починають обслуговувати негайно, в іншому випадку, при наявності вільних місць у черзі (місць чекання), заявка відправляється туди негайно. Якщо ж при надходженні заявки в систему всі канали обслуговування і всі місця чекання зайняті, то заявка залишає систему з ймовірністю $1-H_0$ назавжди або з ймовірністю H_0 — на випадковий період часу, щоб знову спробувати дістати обслуговування.

Про ті заявки, які повертаються в систему і намагаються знову обслужитися, говорять, що вони перебували на орбіті. Вміст орбіти O може бути обмеженим або необмеженим. У випадках, коли O обмежена і повністю заповнена, заявка, яка надійшла туди, назавжди залишає систему. Якщо орбіта не заповнена, то заявка займає місце на ній. Вважається, що час перебування заявки на орбіті розподілений за законом $C(x)$ незалежно для різних заявок та періодів перебування на орбіті. Якщо є вільні канали або місця чекання, заявка після перебування на орбіті негайно відправляється відповідно на обслуговування або в чергу. Якщо ж усі канали і місця чекання зайняті, то заявка залишає систему назавжди з ймовірністю $1-H_k$ (якщо це k-е незалежне повернення) або відправляється на орбіту (якщо вона не повна) з ймовірністю H_k.

У позначеннях за Кендалом СМО з поверненням заявок кодується як $A/B/s/m/O/H$, де A і B — символи розподілів інтервалів часу між надходженням заявок в систему і відповідно часу обслуговування; s — число каналів обслуговування; m — число місць чекання плюс число каналів обслуговування; O — вміст орбіти. H означає, що модель із втратами і описується послідовністю $(H_0, H_1, H_2, \ldots)$. Коли $H_k = 1$ для $k \geq 0$, то система стає системою без втрат. У цьому випадку у позначеннях за Кендалом H записується як NL (no-loss). Коли $H_k = \alpha < 1$ для $k \geq 0$, система називається системою з геометричними втратами і у позначеннях H записується як GL (geometric loss). Якщо m, O, H відсутні у позначеннях СМО за Кендалом, то приймається $m = s$, $O = \infty$, $H = NL$.

Як правило, модель СМО з поверненням заявок передбачає таку дисципліну обслуговування: при наявності вільного каналу на обслуговування приймається та заявка, яка першою застала канал вільним, незалежно від того, звідки вона потрапляє до каналу — з орбіти чи з первинного вхідного потоку. Позначимо таку СМО як RQ (retrial queue).

Особливий тип систем з поверненням розглядали угорські математики [4–7]. Це так звані СМО з циклічним чеканням (cyclic-waiting time). Вперше така модель одноканальної СМО із сталим часом T перебування заявки на орбіті без втрат, без місць чекання і необмеженою орбітою була розглянута професором Л. Лакатошем [4] як модель, що виникла при опису процесу посадки повітряних суден у зв'язку з тестуванням імітаційної моделі. Модель Л. Лакатоша характерна тим, що час перебування заявки на орбіті стала величина, і заявки обслуговуються за порядком черги, тобто це система з дисципліною обслуговування FCFS (first come, first served). Для систем з циклічним чеканням це означає, що коли при зайнятості каналу обслуговування заявка відправляється на орбіту, то заявки, які поступили пізніше за неї (і навіть тоді, коли вона перебувала на орбіті), раніше за неї обслужитися не можуть. Таким чином обслуговування ведеться за порядком черги, враховуючи і моменти надходження заявок, що перебувають на орбіті. Позначимо таку СМО як L (Lakatoś).

Деякі модифікації, узагальнення і обмеження СМО типу L було досліджено в Україні, наприклад, в роботах [8 – 10].

Треба зазначити, що сфера застосування СМО з поверненням заявок досить широка. Це комп'ютерні мережі (локальні і глобальні), системи із замовленням в телефонії, комп'ютерні системи, системи посадки повітряних суден, системи обслуговування клієнтів будь-де і т.п.

У даній статті розглядаються дві СМО з поверненням заявок у такій модифікації.

Нехай заявки поступають у системи за законом Пуассона з параметром λ. Розподіл часу обслуговування в кожній з систем експоненціальний з параметром μ, розподіл часу перебування заявки на орбіті в кожній із систем також експоненціальний з параметром θ. Тобто розглядаються дві системи з повторенням заявок типу $M/M/1$. Проте вважаємо, що одна СМО з поверненням типу RQ, друга — типу L.

На практиці зустрічаються як системи, в яких $\theta << \mu$ (наприклад, системи, якими описується процес посадки літака), так і системи з $\theta >> \mu$ (наприклад, телефонні виклики: розмова триває декілька хвилин, а повторення виклику, якщо лінія зайнята — декілька секунд). Інтуїтивно видається, що такий порядок обслуговування не є оптимальним, оскільки абонент витрачає багато часу на спроби підключитися до каналу. Якщо $\theta >> \mu$, то виникає питання, чи можна якимось чином поліпшити якість обслуговування в системі.

Нехай W — час чекання заявки у стаціонарному режимі. Вважатимемо, що з чеканням заявки в системі $W = x$ пов'язаний збиток $\psi(x)$. Виявляється, що у випадку, коли функція $\psi(x)$ квадратична, то можна за рахунок упорядкування черги зменшити середній збиток при достатньо великому θ (тобто при швидкому поверненні заявки з орбіти).

Таким чином, мета даної статті — показати, що, враховуючи функцію збитку, при достатньо швидкому поверненні заявки з орбіти система типу L має перевагу перед системою типу RQ.

Позначимо $W = W_L$ та $W = W_{RQ}$ — часи чекання відповідно в системах L та RQ. Зупинимося докладніше на понятті часу чекання для систем з повторенням заявок. У теорії систем обслуговування прийнято вважати часом чекання час між надходженням заявки в систему і початком її обслуговування (принаймні, для систем, в яких відсутнє переривання обслуговування). Таким чином, якщо W_n — час чекання заявки n, Y_n — час обслуговування заявки n, то час перебування заявки в системі $V_n = W_n + Y_n$. Таке визначення зберігається і для систем з поверненням заявок [11], хоча в даному випадку час чекання має більш тонку структуру — до нього додається час чекання в черзі, якщо є місця для чекання, а також час перебування заявки на орбіті один чи декілька разів. Треба відзначити, що у СМО з поверненням заявок можливий простій каналу обслуговування в той час, коли заявка чекає (а саме перебуває на орбіті). Така особливість для звичайних систем обслуговування виключена.

Теорема. Нехай c_1, c_2 — сталі; $c_2 > 0$. Тоді існує таке $\theta_0 > 0$, що

$$E\left\{c_1 W_L + c_2 W_L^{\ 2}\right\} < E\left\{c_1 W_{RQ} + c_2 W_{RQ}^{\ 2}\right\}$$

при будь-яких $\theta > \theta_0$.

Наведемо формулювання цієї теореми в інших позначеннях. Нехай λ та μ фіксовані, а θ — змінна. Позначимо

$$\alpha_{j,L}(\theta) = E\left\{W_L^{\ j}\right\},\ \alpha_{j,RQ}(\theta) = E\left\{W_{RQ}^{\ j}\right\}$$

як моменти порядку j відповідно для систем L та RQ. Тоді при $\theta > \theta_0$

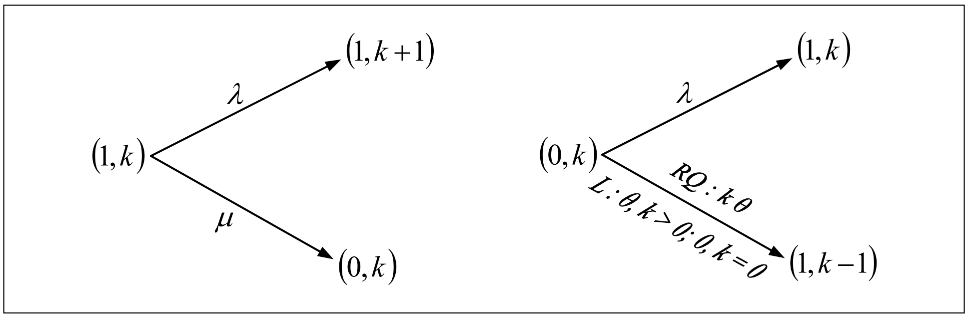
$$c_1\alpha_{1,L}(\theta) + c_2\alpha_{2,L}(\theta) < c_1\alpha_{1,RQ}(\theta) + c_2\alpha_{2,RQ}(\theta).$$

Доведення. Позначимо

$$I(t) = \begin{cases} 1, & \text{якщо прилад зайнятий у момент } t, \\ 0, & \text{якщо прилад вільний у момент } t, \end{cases}$$

$J(t)$ — поточна кількість заявок на орбіті. Тоді для обох систем L та RQ $(I(t),\ J(t))$ є марковський процес з дискретною множиною станів. Можливі стани цього процесу — це стани $(0,k)$ та $(1,k)$, $k \ge 0$.

Граф інтенсивностей переходів марковського процесу для систем типу RQ і L подано на рисунку.



Граф переходів марковського процесу

Позначимо $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$. Якщо $\rho < 1$ у випадку системи RQ або $\lambda(\mu+\theta) <$ $< \mu\theta$ у випадку системи L, то існують стаціонарні ймовірності.

$$p_k = p_k(\theta) = \lim_{t\to\infty} P\{I(t)=1, J(t)=k\},$$

$$q_k = q_k(\theta) = \lim_{t\to\infty} P\{I(t)=0, J(t)=k\}.$$

Запишемо систему рівнянь Колмогорова для стаціонарних ймовірностей у системі L.

$$(\lambda+\mu)p_k = \lambda p_{k-1} + \lambda q_k + \theta q_{k+1},\ k>0, \tag{1}$$

$$(\lambda+\theta)q_k = \mu p_k,\ k>0 \tag{2}$$

та граничну умову

$$\lambda q_0 = \mu p_0. \tag{3}$$

Перейдемо до розв'язку цієї системи рівнянь. Виразимо q_k з (2) та підставимо у (1). Тоді при $k>0$ одержуємо

$$(\lambda+\mu)p_k = \lambda p_{k-1} + \frac{\lambda\mu}{\lambda+\theta}p_k + \frac{\theta\mu}{\lambda+\theta}p_{k+1}$$

або

$$\lambda p_k - \frac{\theta\mu}{\lambda+\theta}p_{k+1} = \lambda p_{k-1} - \frac{\theta\mu}{\lambda+\theta}p_k,\quad k\ge 1.$$

Таким чином, $\lambda p_{k-1} - \dfrac{\theta\mu}{\lambda+\theta}p_k = \text{const}$, $k \ge 1$. Ця константа повинна дорівнювати нулю, бо якщо припустити супротивне, то ймовірності $p_k \not\to 0$ при $k\to\infty$. Отже,

$$p_k = \frac{\lambda + \theta}{\theta} \rho \, p_{k-1}, \; k \geq 1,$$

звідки

$$p_k = p_0 \rho^k \left(1 + \frac{\lambda}{\theta}\right)^k, \; k \geq 0. \tag{4}$$

З (2) одержуємо

$$q_k = p_0 \rho^k \frac{\mu}{\theta} \left(1 + \frac{\lambda}{\theta}\right)^{k-1}, \; k \geq 1.$$

З (3) маємо

$$q_0 = \frac{p_0}{\rho}.$$

Застосовуючи умову нормування, яка в даному випадку має вигляд

$$\sum_{k=0}^{\infty} (p_k + q_k) = 1,$$

одержуємо

$$p_0 = \left(1 - \rho\left(1 + \frac{\lambda}{\theta}\right)\right)\rho.$$

Тоді з (2), (3) та (4) маємо

$$p_k = p_{k,L} = \left(1 - \rho\left(1 + \frac{\lambda}{\theta}\right)\right)\rho^{k+1}\left(1 + \frac{\lambda}{\theta}\right)^k, \quad k \geq 0, \tag{5}$$

$$q_k = q_{k,L} = \left(1 - \rho\left(1 + \frac{\lambda}{\theta}\right)\right)\rho^k \frac{\lambda}{\theta}\left(1 + \frac{\lambda}{\theta}\right)^{k-1}, \quad k \geq 1. \tag{6}$$

Система рівнянь Колмогорова для стаціонарних ймовірностей в системі RQ має такий вигляд.

$$(\lambda + \mu) p_k = \lambda p_{k-1} + \lambda q_k + (k+1)\theta q_{k+1}, \quad k \geq 0,$$

$$(\lambda + k\theta) q_k = \mu p_k, \; k \geq 0,$$

де покладається $p_{-1} = 0$.

Аналогічно випадку з системою L одержуємо

$$\lambda p_{k-1} - \mu \frac{k\theta}{\lambda + k\theta} p_k = 0,$$

звідки

$$p_k = p_0 \rho^k \left(1 + \frac{\lambda}{\theta}\right) \ldots \left(1 + \frac{\lambda}{k\theta}\right), \quad k > 0, \tag{7}$$

$$q_0 = \frac{p_0}{\rho}, \tag{8}$$

$$q_k = p_0 \frac{\lambda}{k\theta} \rho^k \left(1 + \frac{\lambda}{\theta}\right) \ldots \left(1 + \frac{\lambda}{(k-1)\theta}\right), \quad k > 0, \tag{9}$$

де p_0 визначається умовою нормування.

З (7) і (9) одержуємо нерівності

$$p_0 \rho^k < p_k < p_0 \rho^k \left(1 + \frac{\lambda}{\theta}\right)^k, \quad k > 0, \tag{10}$$

$$0 < q_k < p_0 \frac{\lambda}{\theta} \rho^k \left(1 + \frac{\lambda}{\theta}\right)^{k-1}, \quad k > 0. \tag{11}$$

З (10), (11) знаходимо границі для ймовірності p_0.

$$\left(1 - \rho\left(1 + \frac{\lambda}{\theta}\right)\right)\rho < p_0 < (1-\rho)\rho. \tag{12}$$

З (7), (8), (9), (12) для системи RQ встановлюємо такі оцінки.

$$\left(1 - \rho\left(1 + \frac{\lambda}{\theta}\right)\right)\rho^{k+1} < p_k < (1-\rho)\rho^{k+1}\left(1 + \frac{\lambda}{\theta}\right)^k, \quad k \ge 0, \tag{13}$$

$$1 - \rho\left(1 + \frac{\lambda}{\theta}\right) < q_0 < 1 - \rho, \tag{14}$$

$$0 < q_k < (1-\rho)\frac{\lambda}{\theta}\rho^k \left(1 + \frac{\lambda}{\theta}\right)^{k-1}, \quad k > 0. \tag{15}$$

Припустимо, що заявка надходить у систему L в момент, коли $I(t) = i$, $J(t) = k$. При $i = 1$ час W_L чекання цієї заявки

$$W_L = S_{k+1} + S'_{k+1},$$

де S_{k+1} — сума $k+1$ незалежних експоненціально розподілених випадкових величин з параметром μ; S'_{k+1} — сума незалежних експоненціально розподілених випадкових величин з параметром θ.

При $i = 0$ маємо

$$W_L = S_k + S'_{k+1}.$$

Звідси знаходимо

$$\alpha_{j,L} = \sum_{k=0}^{\infty} p_{k,L} E\left\{\left(S_{k+1} + S'_{k+1}\right)^j\right\} + \sum_{k=0}^{\infty} q_{k,L} E\left\{\left(S_k + S'_{k+1}\right)^j\right\}, \quad j = 1,2,\ldots$$

Зокрема,

$$\alpha_{1,L}(\theta)=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)p_{k,L}\left(\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\theta}\right)+\sum_{k=0}^{\infty}q_{k,L}\left(\frac{k}{\mu}+\frac{k+1}{\theta}\right), \tag{16}$$

$$\alpha_{2,L}(\theta)=\sum_{k=0}^{\infty}p_{k,L}\left[(k+1)^2\left(\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\theta}\right)^2+(k+1)\left(\frac{1}{\mu^2}+\frac{1}{\theta^2}\right)\right]+$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}q_{k,L}\left[\left(\frac{k}{\mu}+\frac{k+1}{\theta}\right)^2+\frac{k}{\mu^2}+\frac{k+1}{\theta^2}\right]. \tag{17}$$

З (5), (6), (16) і (17) випливає, що

$$\lim_{\theta\to\infty}\alpha_{1,L}(\theta)=\frac{\rho}{(1-\rho)\mu}, \tag{18}$$

$$\lim_{\theta\to\infty}\alpha_{2,L}(\theta)=\frac{2\rho}{(1-\rho)^2\mu^2}. \tag{19}$$

Праві частини формул (18) і (19) являють собою відповідно перший та другий моменти стаціонарного розподілу часу чекання в системі $M/M/1$ з дисципліною обслуговування FCFS (див., наприклад, [13, стор. 115]).

Розглянемо систему $M/M/1$ з параметрами λ, μ потоку і обслуговування відповідно з дисципліною обслуговування при випадковому виборі заявок з черги. Час чекання заявки у стаціонарному режимі позначимо W_{RC} (RC — Random Choice).

$$\alpha_{j,RC}=E\left\{W_{RC}^{j}\right\},\quad j=1,2,\ldots$$

Справджуються такі формули [14].

$$\alpha_{1,RC}=\frac{\rho}{(1-\rho)\mu},$$

$$\alpha_{2,RC}=\frac{4\rho}{(1-\rho)^2(2-\rho)\mu^2}.$$

Таким чином, для доведення теореми достатньо встановити нерівності

$$\underline{\lim}_{\theta\to\infty}\alpha_{1,RQ}(\theta)\ge\alpha_{1,RC}, \tag{20}$$

$$\underline{\lim}_{\theta\to\infty}\alpha_{2,RQ}(\theta)\ge\alpha_{2,RC}. \tag{21}$$

Нехай у момент 0 у стаціонарному режимі в систему RC надходить заявка, W_{RC} — її час чекання. Розглянемо подію $\{W_{RC}>t\}$, де $t>0$. Нехай

$N(x)$ — число заявок в системі в момент x. Процес $N(x)$ є процесом розмноження та загибелі з інтенсивністю розмноження λ, інтенсивністю загибелі μ і початковим розподілом $p_k = (1-\rho)\rho^{k-1}$. Будь-яку траєкторію K_t даного процесу на відрізку $[0,t]$ можна кодувати ланцюжком $K_t = (k_0, k_1, \ldots, k_{m+1})$, де k_0 — довжина черги в момент 0; $k_1 = k_0 + 1 = N(0+)$, $k_{2,\ldots,}k_{m+1}$ — значення $N(x)$ після 2-го, ... , $m+1$-го стрибка на відрізку $[0,t]$. Ймовірність траєкторії, яку позначимо $P\{K_t\}$, має вигляд

$$P\{K_t\} = p_{k_0} e^{-(\lambda+\mu)t} (\lambda t)^i (\mu t)^{m-i} \big/ m!,$$

де $2i = k_{m+1} - k_0 + m - 1$, якщо права частина цієї нерівності парна. Враховуючи лише ті траєкторії, для яких $k_i > 0$, $0 \le i \le m+1$, визначимо

$$\varphi(K_t) = \prod_{i:k_{i+1}<k_i} \frac{k_i - 1}{k_i}.$$

Тоді

$$P\{W_{RC} > t\} = \sum_{K_t} P\{K_t\} \varphi(K_t), \tag{22}$$

де сумування провадиться по припустимих траєкторіях K_t. Формула (22) пояснюється тим, що для події $\{W_{RC} > t\}$ потрібно, щоб у кожний момент закінчення обслуговування вибиралася не дана, а яка-небудь інша заявка. За даними $\varepsilon > 0$ і $T > 0$ можна знайти таку скінченну множину $\boldsymbol{K}$, що

$$\sum_{K_t \in \boldsymbol{K}} P\{K_t\} \varphi(K_t) > P\{W_{RC} > t\} - \varepsilon \tag{23}$$

рівномірно по $t \in [0,T]$. Щодо T, то обираємо його за умови

$$\int_T^\infty (1+x) P\{W_{RC} > x\} dx < \varepsilon. \tag{24}$$

Розглянемо систему RQ.

За траєкторією $K_t \in \boldsymbol{K}$ визначимо подію $A[K_t]$ в системі RQ, яка полягає в тому, що довжина черги $N_{RQ}(x)$ у даній системі дотримується траєкторії K_t. Якщо s — точка від'ємного стрибка $N_{RQ}(x)$ на відрізку $[0,t]$, то в інтервалі $(s, s+\delta)$, $\delta = \delta(K_t)$ відбудеться повернення деякої заявки з орбіти, не поступить і не буде обслуговано жодної заявки. Очевидно, при малому $\delta > 0$ і великих θ

$$P\{A[K_t]\} > P\{K_t\}(1-\varepsilon), \quad 0 < t < T, \tag{25}$$

тому що

$$P\{K_t\} - P\{A[K_t]\} \le m\delta\left(e^{-\theta\delta} + \lambda + \mu\right) + \left| p_{k_0,RQ} - (1-\rho)\rho^k \right|,$$

де останній доданок є $o(1)$ при $\theta \to \infty$ відповідно до (13). Оскільки $\boldsymbol{K}$ — скінченна множина, то можна вибрати спільне θ_0 для усіх $K_t \in \boldsymbol{K}$, щоб нерівність (25) виконувалась для всіх $\theta > \theta_0$.

З (23) і (25) маємо

$$P\{W_{RQ} > t\} > P\{W_{RC} > t\} - 2\varepsilon, \quad 0 < t < T. \tag{26}$$

Інтегруючи (26), отримуємо

$$E\{W_{RQ}\} > \int_0^T P\{W_{RC} > t\} dt - 2\varepsilon T.$$

Внаслідок (24) маємо

$$\alpha_{1,RQ}(\theta) > \alpha_{1,RC} - \varepsilon(1 + 2T). \tag{27}$$

Аналогічно

$$\alpha_{2,RQ}(\theta) = 2\int_0^\infty t\, P\{W_{RQ} > t\} dt >$$

$$> 2\int_0^T t\, P\{W_{RC} > t\} dt - 4\varepsilon T > \alpha_{2,RC} - 2\varepsilon(1 + 2T). \tag{28}$$

Оскільки $\varepsilon > 0$ — довільне, то з (27) і (28) знаходимо (20) і (21).

Зазначимо, що нерівності (20) і (21) можна також довести, використовуючи вирази для першого моменту та дисперсії часу чекання в системі $M/M/1$ з поверненням заявок, отриманих Фаліним [12].

$$E\{W\} = \frac{\rho}{1-\rho}\left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\theta}\right), \tag{29}$$

$$Var\{W\} = \frac{\rho}{(1-\rho)^2(2-\rho)}\left(\frac{4 - 2\rho + \rho^2}{\mu^2} + \frac{4}{\mu\theta} + \frac{4 - 4\rho + \rho^2}{\theta^2}\right). \tag{30}$$

З (29) і (30) отримуємо

$$\lim_{\theta\to\infty} \alpha_{1,RQ}(\theta) = \lim_{\theta\to\infty} \frac{\rho}{1-\rho}\left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\theta}\right) = \frac{\rho}{(1-\rho)\mu} = \alpha_{1,RC},$$

$$\lim_{\theta\to\infty} \alpha_{2,RQ}(\theta) = \lim_{\theta\to\infty} \frac{\rho}{(1-\rho)^2}\left[\frac{4}{\mu^2(2-\rho)} + \frac{2(2\rho - \rho^2 + 2)}{\mu\theta(2-\rho)} + \frac{2}{\theta^2}\right] =$$

$$= \frac{4\rho}{(1-\rho)^2(2-\rho)\mu^2} = \alpha_{2,RC},$$

що доводить справедливість (20) і (21).

ЛІТЕРАТУРА

1. *Yang T., Templeton J.G.C.* A survey on retrial queues // Queueing Systems. — 1987. — № 2. — P. 201–233.
2. *Falin G.I.* A survey on retrial queues // Queueing Systems. — 1990. — № 7. — P. 127–168.
3. *Falin G.I., Templeton J.G.C.* Retrial queues. — London: Chapman & Hall. — 1997. — 328 p.
4. *Lakatoš L.* On a simple continuous cyclic-waiting problem // Annales Univ. Sci. — Budapest, Sect. Comp. — 1994. — № 14. — P. 105–113.
5. *Lakatoš L.* On a cyclic-waiting queueing problem // Theory of Stoch. Proc. — 1996. — № 2(18). — P. 176–180.
6. *Lakatoš L.* On a discrete cyclic-waiting queueing problem // J. Math. Sci. (New York). — 1998. — № 4(92). — P. 4031–4034.
7. *Farkas G.* Investigation of a continuous cyclic-waiting problem by simulation // Annales Univ. Sci. Budapest, Sect. Comp. — 2000. — № 19. — P. 225–235.
8. *Коба Е.В.* О системе обслуживания $GI/G/1$ с повторением заявок при обслуживании в порядке очереди // Доповіді НАН України. — 2000. — № 6. — С. 101–103.
9. *Коваленко И.Н., Коба Е.В.* Три системы обслуживания с повторными вызовами, отражающие некоторые особенности процесса посадки воздушных судов // Проблемы управления и информатики. — 2002. — № 2. — С. 78–82.
10. *Коваленко И.Н.* Вероятность потери в системе обслуживания $M/G/m$ с T-повторениями вызовов в режиме малой нагрузки // Доповіді НАН України. — 2002. — № 5. — С. 77–80.
11. *Falin G., Fricker C.* On the virtual waiting time in an $M/G/1$ retrial queue. // J. Appl. Prob. — 1991. — № 28. — P. 446–460.
12. *Фалин Г.И.* Время ожидания в одноканальной системе обслуживания с повторением вызовов // Вестник Московского ун-та: Вычислительная математика и кибернетика. — Серия 15. —1977. — № 4. — С. 66–69.
13. *Бочаров П.П., Печинкин А.В.* Теория массового обслуживания. — М.: Изд-во Рос. ун-та дружбы народов. — 1995. — 529 с.
14. *Саати Т.Л.* Элементы теории массового обслуживания и ее приложения. Изд. 2. — М.: Сов. радио, 1971. — 520 с.

Надійшла 11.02.2003