

УДК 539.3:519.7:004.8

DOI: 10.32626/2308-5878.2026-30.48-62

**Гук Н. А.**

ORCID: 0000-0001-7937-1039,

д-р фіз.-мат. наук, Дніпровський національний  
університет імені Олеся Гончара, м. Дніпро, Україна,  
E-mail: huk\_n@365.dnu.edu.ua

**Сіліч-Балгабаєва В. Б.**

ORCID: 0000-0002-9490-3600,

канд. техн. наук, Дніпровський національний  
університет імені Олеся Гончара, м. Дніпро, Україна,  
E-mail: v\_silichbalgabaeva@365.dnu.edu.ua

**Степанова Н. І.**

ORCID: 0000-0002-9490-3600,

канд. фіз.-мат. наук, Дніпровський національний  
університет імені Олеся Гончара, м. Дніпро, Україна,  
E-mail: stepanova\_n@365.dnu.edu.ua

## **DATA-DRIVEN ПІДХІД ДО ОБЕРНЕНИХ ЗАДАЧ БІФУРКАЦІЇ ТОНКОСТІННИХ СИСТЕМ НА ОСНОВІ НЕЙРОННИХ МЕРЕЖ**

У роботі розглянуто задачу прогнозування біфуркаційної поведінки тонкостінних систем, що перебувають під дією переважаючих стискаючих навантажень за наявності локальних імпульсних збурень. В умовах нелінійного деформування такі системи можуть демонструвати множинність рівноважних станів, а їхня динаміка характеризується високою чутливістю до параметрів навантаження та початкових умов, що ускладнює застосування класичних аналітичних і числових методів.

В роботі запропоновано data-driven підхід до розв'язання оберненої задачі біфуркації, який ґрунтується на використанні нейромережевих моделей для ідентифікації та прогнозування критичних станів за часовими послідовностями вимірюваних значень переміщень. Побудовано динамічну нейронну мережу на основі багатопарового перцептрона з урахуванням часової передісторії процесу деформування через введення регресорів і елементів затримки, що дозволяє враховувати інерційні властивості системи. Обернену задачу сформульовано як задачу

---

*Стаття надійшла до редакції: 12.05.2026*

*Рекомендовано до друку: 19.05.2026*

*Оприлюднено (online): 29.05.2026*

*Ця стаття розповсюджується на умовах ліцензії CC Attribution-NonCommercial-NoDerivatives 4.0*

прогнозування настання біфуркаційного переходу на основі мінімізації функціоналу похибки між спостережуваними та еталонними даними. Вихід нейронної мережі інтерпретується як неперервна оцінка ступеня наближення системи до критичного стану з подальшою бінарною класифікацією.

Проведено обчислювальні експерименти, що підтверджують точність і ефективність запропонованого підходу. Показано, що нейромережева модель забезпечує достовірне прогнозування біфуркації за час, менший, ніж час її реалізації, а також демонструє стійкість до варіацій параметрів і зовнішніх збурень. Отримані результати свідчать про перспективність застосування data-driven методів для задач аналізу, ідентифікації та ранньої діагностики втрати стійкості тонкостінних конструкцій.

**Ключові слова:** *тонкостінні системи, біфуркація, втрата стійкості, обернені задачі, нейронні мережі, data-driven підхід, динамічні системи, прогнозування, нелінійна динаміка, ідентифікація параметрів, інформаційні технології.*

**Вступ.** Особливе місце в механіці руйнування посідає дослідження закритичної поведінки елементів конструкцій, оскільки саме на цій стадії формуються передумови аварій та катастрофічних відмов. У закритичній області функціонування тонкостінні системи демонструють складну нелінійну динаміку, окремі елементи поступово втрачають несучу здатність, що спричиняє перерозподіл навантажень і ініціює каскадні процеси деградації. Такі внутрішні механізми взаємодії мають високий ступінь невизначеності та слабку формалізованість у межах класичних аналітичних моделей.

У цьому контексті перспективним є використання data-driven підходів, зокрема нейронних мереж, які дозволяють відновлювати приховані закономірності закритичної поведінки на основі експериментальних або згенерованих розрахункових даних. Застосування таких методів відкриває нові можливості для розв'язання обернених задач біфуркації, пов'язаних з ідентифікацією критичних станів, параметрів системи та сценаріїв втрати стійкості в тонкостінних конструкціях.

**Огляд сучасних досліджень.** Дослідження біфуркаційної поведінки тонкостінних конструкцій є ключовим напрямом сучасної механіки деформівного твердого тіла, оскільки саме втрата стійкості визначає граничні режими експлуатації тонкостінних конструкцій. Класичні аналітичні підходи до опису таких явищ базуються на строгих математичних постановках задач стійкості та біфуркації в межах нелінійних рівнянь. Зокрема, у роботі [1] запропоновано асимптотичну багатомасштабну формалізацію задачі біфуркації, що дає змогу отримувати узагальнені функціонали втрати стійкості з високою точністю. Такі підходи забезпечують фізичну інтерпретованість і є осно-

вою аналізу нестійкостей у процесах формування, однак вони здебільшого орієнтовані на розв'язання прямих задач і мають обмежену придатність для аналізу спостережуваних систем.

Подальший розвиток отримали аналітичні методи оберненої біфуркації, які дозволяють не лише прогнозувати втрату стійкості, а й керувати цим процесом через оптимізацію параметрів конструкції. У цьому контексті у роботі [2] обернені задачі біфуркації формалізовано в рамках рівнянь фон Кармана. Такий підхід дозволяє визначати оптимальні розподіли товщини, кривини або зовнішнього навантаження, а також прогнозувати критичні стани конструкцій. Водночас складність нелінійних рівнянь і висока обчислювальна вартість обмежують застосування таких методів у задачах багатопараметричного аналізу.

Числові методи, зокрема метод скінченних елементів, стали основним інструментом дослідження біфуркаційної поведінки складних конструкцій. Як показано у [3], геометричні параметри тонкостінних композитних конструкцій, зокрема форма та розташування отворів, суттєво впливають на критичні навантаження втрати стійкості. Для дослідження цих залежностей застосовуються методи планування експерименту, однак вони потребують значної кількості числових розрахунків, що робить їх малоефективними у задачах оперативної ідентифікації та проектування тонкостінних систем.

Складність багатопараметричних систем і висока обчислювальна вартість традиційних методів стимулювали розвиток альтернативних підходів, зокрема методів машинного навчання. У роботі [4] показано, що багаточарові нейронні мережі дозволяють ефективно апроксимувати залежність між геометричними параметрами тонкостінних елементів та їх критичними навантаженнями. Використання даних, отриманих за допомогою числових методів (FSM, ENFM), забезпечує високу точність прогнозування, а також можливість ідентифікації форм втрати стійкості з точністю до 98%. Це свідчить про значний потенціал нейронних мереж як швидкої альтернативи класичним методам обчислень.

Подальший розвиток отримали гібридні підходи, що поєднують нейронні мережі та еволюційні алгоритми. У роботі [5] запропоновано метод BP-GA для оберненого проектування тонкостінних підсилювачів конструкцій. Нейронна мережа використовується для побудови відображення між геометричними параметрами та критичними навантаженнями, тоді як генетичний алгоритм забезпечує глобальну оптимізацію. Отримані результати демонструють високу точність, зокрема похибка становить близько 5%, що підтверджує ефективність data-driven підходів у обернених задачах аналізу біфуркації.

Схожі підходи застосовуються і для складних багатокоміркових систем. У роботі [6] показано, що топологія та кількість комірок сут-

тво впливають на енергопоглинальні властивості та критичні режими деформації. Для оптимізації використовуються еволюційні алгоритми (NSGA-II), однак такі методи залишаються витратними, особливо для розв'язання задач багатокритеріальної оптимізації та в разі необхідності швидкої оцінки стану системи.

Актуальним напрямом є розробка методів визначення параметрів матеріалів із заданими властивостями. В роботі [7] показано, що використання глибинних нейронних мереж у поєднанні з генетичними алгоритмами дозволяє ефективно розв'язувати задачі дизайну графчастих структур із підвищеною здатністю до втрати стійкості. Подібні data-driven методи забезпечують суттєве покращення характеристик порівняно з класичними конструкціями.

У задачах проектування матеріалів із нелінійною механічною відповіддю [8] нейронні мережі застосовуються для швидкої апроксимації залежності між геометрією структури та її механічною поведінкою. Поєднання з еволюційними стратегіями дозволяє ефективно знаходити конфігурації з наперед заданими властивостями, що особливо важливо для задач керування процесами деформування.

В умовах невизначеності особливого значення набуває врахування випадкових геометричних недосконалостей. У роботі [9] показано, що моделювання таких факторів у вигляді випадкових полів у поєднанні з методом Монте-Карло та скінченно-елементним аналізом вимагає великих обчислювальних потужностей. Разом з тим, використання нейронних мереж дозволяє суттєво прискорити обчислення при збереженні високої точності прогнозування появи критичних навантажень.

Для задач нелінійної динаміки тонкостінних систем типовою є біфуркаційна поведінка, що характеризується множинністю рівноважних станів [10]. Поєднання аналітичних методів з чисельним інтегруванням дозволяє отримати біфуркаційні діаграми, однак значна чутливість до параметрів і відмінності між лінеаризованими та нелінійними моделями ускладнюють точне прогнозування критичних режимів, що вимагає додаткових експериментальних досліджень для підтвердження адекватності моделей і підвищення достовірності отриманих результатів.

Загалом аналіз сучасних підходів показує, що класичні аналітичні та числові методи забезпечують високу фізичну точність, однак є обмеженими з точки зору обчислювальної ефективності та придатності до розв'язання задач оберненої ідентифікації. Натомість сучасні data-driven методи, зокрема нейронні мережі у поєднанні з генетичними алгоритмами, демонструють високу швидкість, здатність до узагальнення та ефективність у багатопараметричних задачах біфуркації.

Таким чином, сучасний стан досліджень чітко вказує на необхідність розвитку нових обчислювальних методів на основі нейрон-

них мереж і data-driven підходів, які дозволять подолати обмеження класичних моделей і забезпечують ефективне розв'язання обернених задач біфуркації тонкостінних систем.

**Постановка задачі.** Розглядається поведінка тонкостінного елемента конструкції, що перебуває під дією номінальних стискаючих навантажень, близьких до критичних, за наявності локального ударного впливу. За певного рівня навантаження система досягає стану втрати стійкості, що відповідає біфуркації типу граничної точки для відповідної нелінійної крайової задачі. У цих умовах локальне динамічне збурення може призводити до принципово різних сценаріїв подальшої еволюції системи: до затухання коливань поблизу докритичного стану рівноваги; до розвитку нестійкості з наростанням амплітуди деформацій і переходом до закритичної форми, що супроводжується руйнуванням конструкції.

Задача ускладнюється наявністю двомасштабної динаміки процесу: «повільного» квазістатичного деформування та «швидкого» динамічного впливу, а також можливістю одноразових або повторних ударних навантажень. Критерієм уразливості системи визначено реалізацію закритичної форми деформування із заданим рівнем деформацій, що відрізняється від початкового докритичного стану.

У межах сформульованої постановки задачі основними завданнями є:

- прогнозування сценарію подальшої поведінки системи (стабілізація або розвиток нестійкості) на основі аналізу її ретроспективної динаміки на інтервалі часу, меншому за характерний час формування закритичного стану;
- ідентифікація ефективних критичних навантажень, що відповідають спостережуваній поведінці системи з урахуванням динамічних збурень і нелінійних ефектів.

Розв'язання зазначених задач передбачає використання сучасних підходів до аналізу нелінійних систем, зокрема методів обернених задач і data-driven моделей, орієнтованих на обробку динамічної інформації та виявлення прихованих закономірностей біфуркаційної поведінки.

**Математична модель прямої та оберненої задач.** Стан тонкостінного оболонкового елемента описується вектор-функцією переміщень  $U(X, H) \equiv (u_i(X, H), \hat{w}(X, H))$  та залежить від невідомих функцій  $H(X)$ , що характеризують фізичні, механічні та конструктивні властивості оболонки. Система рівнянь рівноваги зображується в такий спосіб:

$$\gamma_1 u_{i,tt} + \nabla_j \left( C_1^{ijkl} (H) \nabla_k u_l \right) - \nabla_j \left[ C_1^{ijkl} \left( B_{kl} (H) w - \frac{1}{2} w_{,\zeta k} w_{,\zeta l} \right) \right] + q_i = 0; \quad (1)$$

$$\gamma_2 u w_{l,t} + \varepsilon^2 \nabla_{ij} \left( C_2^{ijkl} (H) \nabla_{kl} w \right) - C_1^{ijkl} (H) \varepsilon_{kl} \left( B_{ij} (H) + \nabla_{ij} w \right) - q = 0, \quad (2)$$

$$i, j, k, l = 1, 2,$$

де  $u_i$  – тангенціальні переміщення точок серединної поверхні оболонки в поздовжньому та окружному напрямках  $x_1, x_2$ ;  $w$  – нормальні переміщення точок серединної поверхні оболонки;  $t$  – час;  $\varepsilon_{kl}$  – тензор тангенціальної деформації;  $C_1^{ijkl} (H)$ ,  $C_2^{ijkl} (H)$  – жорсткість оболонки на розтягання-стискання та згинальна жорсткість;  $\hat{B}_{11} = 0$ ;  $\hat{B}_{22} = \frac{1}{R}$ ;  $\hat{B}_{12} = 0$ ;  $i, j, k, l = 1, 2$ , якщо  $i \neq j$ , то  $k \neq l$ , та по чергово  $k = 1, l = 2$ ,  $k = 2, l = 1$ .

Для опису умов закріплення оболонки вводяться коефіцієнти пружності опор  $\hat{k}_1^{ij} (x_1, x_2), i, j = 1, 2$ ,  $\hat{k}_2^{pn} (x_1, x_2), p, n = 3, 4$ , що обмежують тангенціальні й згинальні переміщення на границі  $\Gamma^1, \Gamma^2$  відповідно. При цьому значення  $\hat{k}_1^{ij} (x_1, x_2) \rightarrow \infty$ ,  $\hat{k}_2^{pn} (x_1, x_2) \rightarrow \infty$  забезпечують тверде защемлення краю, а  $\hat{k}_1^{ij} (x_1, x_2) \rightarrow 0$ ,  $\hat{k}_2^{pn} (x_1, x_2) \rightarrow 0$  – відповідно вільне обпирання краю.

Розв'язання прямої задачі передбачає визначення компонентів напружено-деформованого стану тонкостінної системи на основі системи нелінійних диференціальних рівнянь (1), (2) із відповідними граничними умовами в моменти часу  $t$ . В такий спосіб утворюється часовий ряд, елементами якого є стани оболонки у фіксовані моменти часу.

Однак у реальних умовах експлуатації параметри навантаження та стану системи часто є частково невідомими, а інформація про поведінку об'єкта доступна лише у вигляді вимірюваних кінематичних характеристик, зокрема переміщень, у дискретні моменти часу. Це зумовлює необхідність переходу до оберненої задачі, у якій за відомими спостережуваними даними необхідно відновити динамічні характеристики системи та спрогнозувати її критичну поведінку.

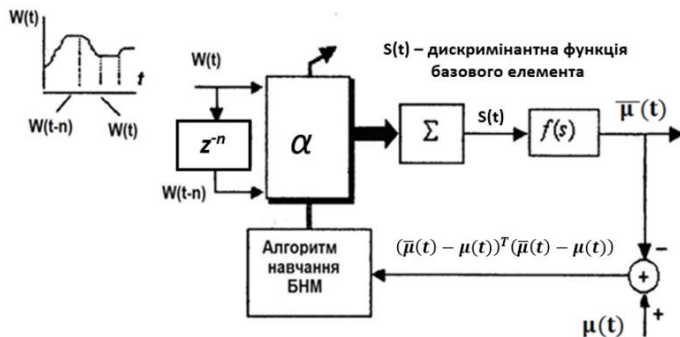
Обернена задача полягає у прогнозуванні біфуркаційної поведінки тонкостінної системи на основі аналізу вимірних переміщень у послідовні моменти часу. Необхідно за заданою часовою послідовністю спостережуваних станів системи визначити наближення до критичного режиму та момент втрати стійкості.

**Метод розв'язання.** Для розв'язання оберненої задачі в роботі використовується нейромережева модель на основі багат шарового перцептрона, яка здійснює апроксимацію нелінійного відображення

між часовими послідовностями переміщень і характеристиками біфуркаційної поведінки. З метою врахування передісторії навантаження та динаміки системи застосовується структура з обробкою часових послідовностей, яка виконує функції дискретного динамічного фільтра  $\Phi(z^{-1})$ . Така структура дозволяє інтегрувати інформацію про попередні стани системи та забезпечує формування прогнозу її подальшої поведінки як динамічного об'єкта.

Для надання динамічних властивостей використано елемент часової затримки з оператором  $z^{-1} = e^{-s\Delta t}$ , де період дискретизації  $\Delta t$  відповідає інтервалу знімання вимірювальної інформації. Застосування елементів затримки дозволяє враховувати передісторію процесу та формувати часові залежності у вхідних даних.

Схему динамічного базового процесорного елемента з використанням елементів затримки наведено на рис. 1.



**Рис. 1.** Схему динамічного базового процесорного елемента з використанням елементів затримки

Кількість елементів затримки в структурі базового елемента визначається числом дискретних значень вхідного вектора, що враховуються під час формування часової послідовності

$$w_n = (w(t), w(t-1), \dots, w(t-n)).$$

Розв'язання оберненої задачі потребує розширення вхідного простору моделі через включення до неї не лише регресорів, що описують поточні вхідні параметри, але й змінних, які характеризують значення шуканого розв'язку на попередніх часових кроках. Таким чином забезпечується врахування динамічної пам'яті системи та її часової залежності.

Для реалізації такого підходу використовується схема узагальненого навчання, яка базується на обробці експериментальних даних типу «вхід–вихід» об'єкта спостереження. У межах даної постановки побудова прямої моделі в заданому класі функцій не потребує повної апріорної

інформації про структуру внутрішніх зв'язків та операторів об'єкта керування, за винятком припущень щодо стійкості та обмеженості всіх його траєкторій  $W(t)$  на розглянутому інтервалі часу  $t \geq 0$ .

Результатом ідентифікації динамічної моделі реального об'єкта спостереження є набір параметрів нейромережевої моделі, отриманих за алгоритмом зворотного поширення похибки. Ці параметри забезпечують наближення функцій виходу моделі до експериментально спостережуваних даних із точністю, що визначається похибкою навчання. У результаті навчання формуються оцінки вектора стану об'єкта, який у загальному випадку описується параметрично нелінійним рівнянням:

$$\mu(t_{k+1}) = f[W(t_k), \dots, W(t_{k+m+1}), \mu(t_k)].$$

Розглянута задача передбачає прогнозування біфуркаційної поведінки системи у фіксовані дискретні моменти часу  $t_k$ . При цьому горизонт прогнозу є меншим за характерний час розвитку біфуркаційного процесу, що надає можливість здійснювати випереджальну оцінку критичних режимів на основі неповної інформації про еволюцію системи.

З огляду на складність та нелінійний характер відображення між спостережуваними даними та критичними станами, задача прогнозування розв'язується із використанням ансамблю нейронних мереж. Такий підхід забезпечує підвищення стійкості та узагальнювальної здатності моделі за рахунок агрегації розв'язків декількох незалежно навчених нейромережевих структур.

Кожна мережа містить  $m$  входів, які формуються як послідовність  $W_t^{(m)} = (W_t, W_{(t-1)}, \dots, W_{(t-(k+m+1))}, W_t) = \{W_{S_t}, S = 1, N\}$ , вона здійснює відображення  $W_{t+1}^{(m)} = F(W_t^{(m)})$ , де  $m$  – число входів, обумовленим числом вимірювань параметрів стану конструкції  $N$  і відповідних дискретних моментів часу  $n$ . Вигляд матриці навчання ансамблю нейронних мереж наведено в таблиці 1.

Таблиця 1

Матриця навчання ансамблю нейронних мереж

Входи					Вихід
$W_1$	$W_2$	.....	$W_m$		$\mu_k$
$W_2$	$W_3$	.....	$W_{m+1}$	$\mu_k$	$\mu_{k+1}$
$W_3$	$W_4$	.....	$W_{m+2}$	$\mu_{k+1}$	$\mu_{k+2}$
.....	.....	.....	.....	.....	.....
$W_{n-m+1}$	$W_{n-m+2}$	.....	$W_n$	$\mu_{k+n-m}$	$\mu_{k+n-m+1}$

Нейронна мережа формує вихідне значення  $\mu_{HM} \in [0, 1]$ , яке інтерпретується як міра наближення системи до біфуркаційного стану

або ймовірність його реалізації. Остаточна класифікація здійснюється через порогове перетворення:

$$\mu = \begin{cases} 1, \mu_{HM} \geq \theta, \\ 0, \mu_{HM} < \theta. \end{cases}$$

Такий підхід дозволяє аналізувати динаміку наближення до біфуркації та прогнозувати передкритичні стани.

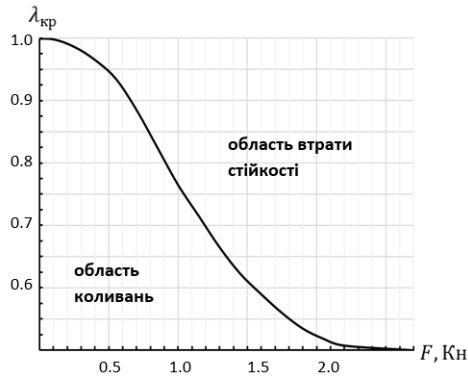
**Аналіз результатів.** Запропонований в роботі підхід було застосовано для аналізу поведінки кругової циліндричної оболонки, що перебуває під дією номінальних стискаючих навантажень, близьких до критичних, за наявності локального ударного впливу. Оболонка з параметрами  $L = 0.64$  м,  $R = 0.16$  м,  $h = 0.001$  м,  $E_0 = 200$  ГПа,  $\nu = 0.3$ ,  $\sigma_T = 250$  МПа,  $E_T = 100$  ГПа,  $\rho = 7.9 \cdot 10^3$  кг·м<sup>-3</sup> знаходиться під дією номінального навантаження – рівномірного нормального зовнішнього тиску  $q_x = q_y = 0, q_z = 100$  КПа. На торцях оболонки виконуються умови шарнірного обпирання з можливістю вільного зсуву в напрямку осі  $x_1$  симетрично щодо площини  $x = L/2$ .

Розв'язання прямої задачі деформування тонкостінної оболонки здійснювалося за допомогою пакета прикладних програм, що реалізує метод скінченних елементів. Теоретичне біфуркаційне значення параметра навантаження становило  $\lambda_{кр} = 1.52$ . Імпульсний вплив здійснюється в області  $\Omega_1 = \{ \{x, y\} \in R_2, |x - L/2| \leq L/40, |y| \leq \pi R/140 \}$  через додавання імпульсного навантаження  $p_x(X) = 0$ ,  $p_y(X) = 0$ ,  $p_z(X) = F/S$  за час  $\tau = 0.002$  с, де  $F$  – амплітуда рівнодіючого нормального навантаження,  $S$  – площа області  $\Omega_1$ ,  $T_0 = 0.0025$  с,  $T = 0.05$  с;

$$\Phi(t, \tau) = \begin{cases} 4(t - T_0)/\tau, T_0 \leq t < T_0 + 0.25\tau, \\ 1, T_0 + 0.25\tau \leq t \leq T_0 + 0.75\tau, \\ -4(t - T_0 - \tau)/\tau, T_0 + 0.75\tau < t \leq T_0 + \tau, \\ 0, t > T_0 + \tau. \end{cases}$$

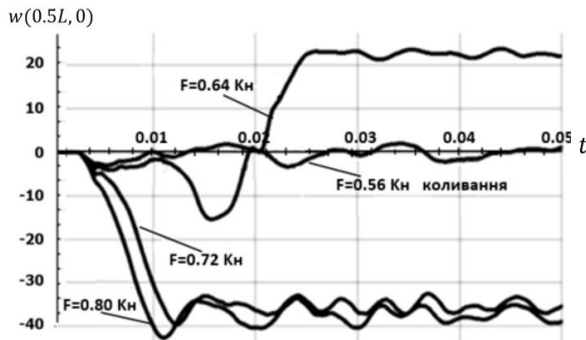
З результатів розрахунків прямих задач деформування випливає, що для  $0.5 \leq \tilde{\lambda}/\lambda_{кр} \leq 1$  при імпульсному впливі з амплітудою  $F \geq F_{кр}$  може відбутися втрата стійкості оболонки. Кінцева форма деформування, що утворюється в момент втрати стійкості, залежить від рівня навантажень  $\tilde{\lambda}$  і  $F$ .

На рис. 2 наведено залежність  $F_{кр}(\lambda_{кр})$ , що відокремлює область втрати стійкості від області коливань. У разі, коли виконуються умови  $\tilde{\lambda} < \lambda_{кр}$ ,  $F < F_{кр}(\lambda_{кр})$ , імпульсний вплив призводить до коливань оболонки за нижчими власними формами, які мають ознаки затухання і не супроводжуються втратою стійкості. У разі  $0 \leq \tilde{\lambda} / \lambda_{кр} < 0.5$  в міру зростання амплітуди  $F$  в оболонці відбувається наростання деформацій, переважно локалізованих у зоні імпульсного впливу, з подальшим формуванням на поверхні оболонки локальної вм'ятини. При цьому коливання набувають загасаючого характеру.



**Рис. 2.** Области втрати стійкості та коливань, відокремлені кривою  $F_{кр}(\lambda_{кр})$

Рис. 3 демонструє характер динамічної поведінки оболонки під дією імпульсного впливу різної інтенсивності. На рис. 4 наведено форми деформування перерізу оболонки в часі за різних значень амплітуди  $F$ .



**Рис. 3** – Динамічна поведінка оболонки при імпульсному впливі в критичній зоні значень  $F$  при  $\tilde{\lambda} = 0,9\lambda_{кр}$

$t, c$ $F, \text{КН}$	0.0030	0.0073	0.012	0.016	0.020	0.024	0.029	0.033	0.037	0.041	0.046	0.050
0,56												
0,64												
0,72												
0,80												

Рис. 4. Форми деформування

З розв'язання прямих задач за різних значень параметрів навантаження було побудовано навчальну вибірку. Далі відбувалося навчання динамічної мережі на наведеній навчальній вибірці. Для створення адекватної нейромережевої моделі здійснено аналіз основних її параметрів: величини кроку на  $k$ -му інтервалі, глибини регресора, числа шарів в прихованому шарі, числа нейронів. Глибина регресора визначає обсяг урахованої часової передісторії.

На рис. 5 наведено результати навчання моделі при різних значеннях глибини регресора:  $n = 5$  (рис. 5, а),  $n = 10$  (рис. 5, б). З аналізу отриманих залежностей можна бачити, що збільшення глибини регресора ( $n = 10$ ) призводить до зростання інерційності динамічної нейронної мережі, що проявляється у розширенні пікових ділянок відгуку. Водночас спостерігається певне зменшення амплітуди піків, що свідчить про покращення відтворювальних властивостей моделі та її здатності до узагальнення динаміки процесу. Але помилка мережі при  $n = 5$  значно менша, ніж при  $n = 10$ .

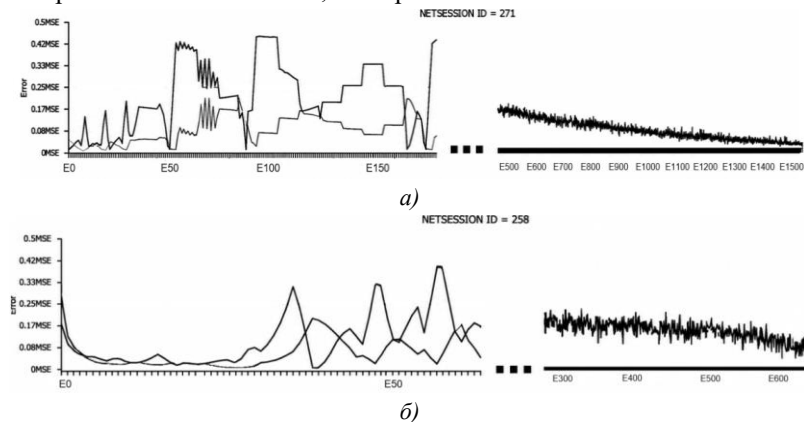


Рис. 5. Навчання динамічної мережі з різною глибиною регресора: а)  $n = 5$ ; б)  $n = 10$

З аналізу подібних залежностей при зміні інших параметрів було обрано конфігурацію нейронної мережі, так величина кроку на  $k$ -му інтервалі дорівнювала  $\Delta t = 0.0001$ , глибина регресора – 5, число прихованих шарів – 4; число нейронів в шарі – 10; число мереж в ансамблі – 3.

Таблиця 2 ілюструє здатність нейромережевої моделі прогнозувати біфуркаційний перехід тонкостінної оболонки за час  $t^*$ . Отримані дані свідчать про достатню точність класифікації стану системи. Зокрема, показано, що в умовах, коли параметр  $\mu_{HM}$  змінюється в діапазоні  $[0.7 \div 1]$ , що відповідає наближенню до критичного стану, нейронна мережа коректно ідентифікує настання біфуркації. При цьому похибка прогнозування є практично нульовою, що підтверджує здатність моделі адекватно відтворювати нелінійну динаміку системи та виявляти критичні режими її функціонування. Отримані результати демонструють ефективність запропонованого підходу для задач раннього виявлення втрати стійкості на основі аналізу часових даних.

Таблиця 2

*Результати тестування здатності нейронної мережі до прогнозування стану*

№ варіанту розрахунку	$\mu_{\text{бісн}}$	$\mu_{HM}$	Момент часу $t^*$
1	0	0.11	0.016
2	0	0.05	0.020
3	0	0.14	0.016
4	1	0.77	0.012
8	1	0.85	0.020
9	0	0.15	0.073
10	0	0.17	0.010
19	1	0.89	0.016
20	1	0.93	0.012

**Висновки.** У роботі розглянуто задачу прогнозування біфуркаційної поведінки тонкостінних систем в умовах дії стискаючих та локальних імпульсних навантажень. На відміну від традиційних підходів, що базуються на розв'язанні прямих задач і характеризуються значною обчислювальною складністю, застосовано data-driven підхід до розв'язання оберненої задачі ідентифікації та прогнозування біфуркацій на основі нейронних мереж.

Побудовано нейромережеву модель динамічного типу, що враховує часову передісторію процесу за рахунок використання регресорів і елементів затримки. Така структура дозволяє відтворювати нелінійну динаміку тонкостінної системи та формувати прогноз її поведінки за час, менший, ніж час реалізації біфуркаційного переходу.

Показано, що якість прогнозування істотно залежить від параметрів нейронної мережі, зокрема глибини регресора, що визначає обсяг урахо-

ваної часової інформації. Встановлено компроміс між інерційністю моделі та точністю відтворення динамічних характеристик системи, що підтверджує необхідність обґрунтованого підбору параметрів мережі.

Результати обчислювального експерименту свідчать про ефективність запропонованого підходу, нейромережева модель забезпечує точне прогнозування настання біфуркації та коректну класифікацію станів системи з мінімальною похибкою. Використання неперервного виходу нейронної мережі з подальшою бінарною інтерпретацією дозволяє не лише фіксувати факт біфуркації, але й оцінювати ступінь наближення системи до критичного стану.

Отримані результати підтверджують доцільність застосування data-driven підходу до розв'язання обернених задач біфуркації тонкостінних систем. Запропонований підхід може бути використаний для задач ранньої діагностики втрати стійкості, підвищення живучості конструкцій та розробки інтелектуальних систем моніторингу їхнього технічного стану.

### Список використаних джерел:

1. Kwon Y., Triantafyllidis N. General asymptotic formulation for the bifurcation problem of thin walled structures in contact with rigid surfaces. *KSME International Journal*. 2000. Vol. 14. P. 48-56. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF03184770>.
2. Obodan N., Adlucky V. Prediction and Control of Buckling: The Inverse Bifurcation Problems for von Karman Equations. 2020. DOI: [https://doi.org/10.1007/978-3-319-99918-0\\_11](https://doi.org/10.1007/978-3-319-99918-0_11).
3. Bin Kamarudin M. N., Mohamed Ali J. S., Aabid A., Ibrahim Y. E. Buckling Analysis of a Thin-Walled Structure Using Finite Element Method and Design of Experiments. *Aerospace*. 2022. Vol. 9. Art. 541. DOI: <https://doi.org/10.3390/aerospace9100541>.
4. Seyed M. M., Jurgen B., Iman H., Rasoul K. Predicting the buckling behaviour of thin-walled structural elements using machine learning methods. *Thin-Walled Structures*. 2023. Vol. 184. Art. 2023, 110518. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.tws.2022.110518>.
5. Lyu Y., Niu Y., He T. et al. An Efficient Method for the Inverse Design of Thin-Wall Stiffened Structure Based on the Machine Learning Technique. *Aerospace*. 2023. Vol. 10. Art 761. DOI: <https://doi.org/10.3390/aerospace10090761>.
6. Wu S., Zheng G., Sun G. et al. On design of multi-cell thin-wall structures for crashworthiness. *Int. J. Impact Eng.* 2016. Vol. 88. P. 102-117. DOI: [10.1016/j.ijimpeng.2015.09.003](https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2015.09.003).
7. Maurizi M., Gao C., Berto F. Inverse design of truss lattice materials with superior buckling resistance. *NPJ Comput. Mater.* 2022. Vol. 8. Art. 247. DOI: <https://doi.org/10.1038/s41524-022-00938-w>.
8. Deng B., Zareei A., Ding X. et al. Inverse Design of Mechanical Metamaterials with Target Nonlinear Response via a Neural Accelerated Evolution Strategy. *Adv. Mater.* 2022. Vol. 34. Art. 2206238. DOI: <https://doi.org/10.1002/adma.202206238>.
9. Schweizer M., Fina M., Wagner W. et al. Artificial neural networks for random fields to predict the buckling load of geometrically imperfect struc-

- tures. *Comput Mech.* 2025. Vol. 76. P. 181-204. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00466-024-02595-w>.
10. Ma S., Huang T., Yan Y. et al. Bifurcation analysis of thin-walled structures trimming process with state-dependent time delay. *International Journal of Mechanical Sciences.* 2024. Vol. 271. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2024.109159.

### References:

1. Kwon Y., Triantafyllidis N. General asymptotic formulation for the bifurcation problem of thin walled structures in contact with rigid surfaces. *KSME International Journal.* 2000. Vol. 14. P. 48-56. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF03184770>.
2. Obodan N., Adlucky V. Prediction and Control of Buckling: The Inverse Bifurcation Problems for von Karman Equations. 2020. DOI: [https://doi.org/10.1007/978-3-319-99918-0\\_11](https://doi.org/10.1007/978-3-319-99918-0_11).
3. Bin Kamarudin M. N., Mohamed Ali J. S., Aabid A., Ibrahim Y. E. Buckling Analysis of a Thin-Walled Structure Using Finite Element Method and Design of Experiments. *Aerospace.* 2022. Vol. 9. Art. 541. DOI: <https://doi.org/10.3390/aerospace9100541>.
4. Seyed M. M., Jurgen B., Iman H., Rasoul K. Predicting the buckling behaviour of thin-walled structural elements using machine learning methods. *Thin-Walled Structures.* 2023. Vol. 184. Art. 2023, 110518. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.tws.2022.110518>.
5. Lyu Y., Niu Y., He T. et al. An Efficient Method for the Inverse Design of Thin-Wall Stiffened Structure Based on the Machine Learning Technique. *Aerospace.* 2023. Vol. 10. Art 761. DOI: <https://doi.org/10.3390/aerospace10090761>.
6. Wu S., Zheng G., Sun G. et al. On design of multi-cell thin-wall structures for crashworthiness. *Int. J. Impact Eng.* 2016. Vol. 88. P. 102-117. DOI: 10.1016/j.ijimpeng.2015.09.003.
7. Maurizi M., Gao C., Berto F. Inverse design of truss lattice materials with superior buckling resistance. *NPJ Comput. Mater.* 2022. Vol. 8. Art. 247. DOI: <https://doi.org/10.1038/s41524-022-00938-w>.
8. Deng B., Zareei A., Ding X. et al. Inverse Design of Mechanical Metamaterials with Target Nonlinear Response via a Neural Accelerated Evolution Strategy. *Adv. Mater.* 2022. Vol. 34. Atr. 2206238. DOI: <https://doi.org/10.1002/adma.202206238>.
9. Schweizer M., Fina M., Wagner W. et al. Artificial neural networks for random fields to predict the buckling load of geometrically imperfect structures. *Comput Mech.* 2025. Vol. 76. P. 181-204. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00466-024-02595-w>.
10. Ma S., Huang T., Yan Y. et al. Bifurcation analysis of thin-walled structures trimming process with state-dependent time delay. *International Journal of Mechanical Sciences.* 2024. Vol. 271. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2024.109159.

## DATA-DRIVEN APPROACH TO INVERSE BIFURCATION PROBLEMS OF THIN-WALLED SYSTEMS BASED ON NEURAL NETWORKS

The paper addresses the problem of predicting the bifurcation behaviour of thin-walled systems subjected predominantly to compressive loads in the presence of local impulsive disturbances. Under conditions of non-

linear deformation, such systems may exhibit multiple equilibrium states, and their dynamics are characterised by high sensitivity to loading parameters and initial conditions, which complicates the application of classical analytical and numerical methods.

A data-driven approach to solving the inverse bifurcation problem is proposed, based on the use of neural network models for the identification and prediction of critical states from time series of measured displacements. A dynamic neural network based on a multilayer perceptron is developed, incorporating the time history of the deformation process through the introduction of regressors and delay elements, which allows the inertial properties of the system to be taken into account. The inverse problem is formulated as the task of predicting the onset of a bifurcation transition by minimising an error functional between observed and reference data. The output of the neural network is interpreted as a continuous estimate of the system's proximity to a critical state, followed by binary classification.

Computational experiments have been conducted to confirm the accuracy and efficiency of the proposed approach. It is shown that the neural network model provides reliable prediction of bifurcation in a time shorter than the time of its occurrence, and also demonstrates robustness to variations in parameters and external disturbances. The obtained results indicate the potential of data-driven methods for analysis, identification, and early diagnosis of stability loss in thin-walled structures.

**Key words:** *thin-walled systems, bifurcation, loss of stability, inverse problems, neural networks, data-driven approach, dynamic systems, prediction, nonlinear dynamics, parameter identification, information technologies.*