

УДК 517.968:519.6:303.732.4

DOI: 10.32626/2308-5878.2026-30.148-167

Сеньо П. С.

ORCID: 0009-0005-7979-2905,

д-р фіз.-мат. наук, професор, Львівський національний
університет імені Івана Франка, м. Львів, Україна

E-mail: petro.seno@lnu.edu.ua

Заяць А. Р.

ORCID: 0009-0004-7793-0238,

аспірант, Львівський національний

університет імені Івана Франка, м. Львів, Україна

E-mail: artur.zaiats@lnu.edu.ua

МОДИФІКАЦІЯ БАЗОВОГО ДВОСТОРОННЬОГО МЕТОДУ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

В роботі розглядається задача побудови гарантованих двосторонніх наближень розв'язку інтегральних рівнянь певних класів. Класичні методи, як правило, дають лише наближення розв'язку в окремих точках, а в інших точках – загальні теоретичні апроксимації без строгих оцінок похибки, тоді як для задач із невизначеністю параметрів або початкових умов принципово важливо отримати верхню та нижню межі, між якими гарантовано міститься шуканий розв'язок. Класичні інтервальні методи розв'язування таких рівнянь на основі інтервальних аналогів рядів Тейлора потребують автоматичного диференціювання високих порядків та характеризуються накопиченням похибки на великих проміжках, що суттєво ускладнює їх практичне застосування. У [1] запропоновано ітераційний двосторонній алгоритм розв'язування рівнянь зазначеного виду на основі математики функціональних інтервалів із квадратичною збіжністю, у якому, однак, вибір довжини інтервалу, що забезпечує задану точність, та число ітерацій звуження лінійного функціонального інтервалу розв'язку визначаються неявно. У цій роботі доведено теорему, що дає оцінку функціональної невизначеності двосторонньої апроксимації на правій межі інтервалу, явний вираз кроку розбиття, який забезпечує задану точність апроксимації за одну побудову, та логарифмічну оцінку кількості ітерацій звуження лінійного функціонального інтервалу розв'язку на заданому проміжку базовим ал-

Стаття надійшла до редакції: 11.05.2026

Рекомендовано до друку: 25.05.2026

Оприлюднено (online): 29.05.2026

Ця стаття розповсюджується на умовах ліцензії CC Attribution-NonCommercial-NoDerivatives 4.0

горитмом з [1]. На основі доведеної теореми запропоновано модифікований алгоритм, який забезпечує бажане звуження двосторонньої апроксимації шуканого розв'язку за один крок. Алгоритм апробовано двома числовими експериментами, результати яких підтверджують теоретичні висновки. Це суттєво зменшує число ітерацій алгоритму.

Ключові слова: *функціональні інтервали, інтегральні рівняння, двосторонні апроксимації, параболічний паралелограм, математичне моделювання, системний аналіз.*

Вступ. Задача побудови гарантованих двосторонніх апроксимацій розв'язку загальної початкової задачі, зокрема, інтегральних рівнянь є одною з центральних задач чисельного аналізу. Класичні методи, як правило, дають лише наближення розв'язку в окремих точках, а в інших точках – загальні теоретичні апроксимації без строгих оцінок похибки, тоді як для задач із невизначеністю параметрів або початкових умов принципово важливо отримати верхню та нижню межі, між якими гарантовано міститься шуканий розв'язок.

Одним із перших систематичних підходів до побудови таких двосторонніх наближень є метод С. А. Чаплигіна розв'язування задачі Коші. Проте практичне застосування методу Чаплигіна пов'язане зі значними труднощами. Зокрема, необхідно аналітично знайти початкові верхню та нижню наближення, що задовольняють відповідні диференціальні нерівності, що є нетривіальною задачею. Крім цього, кожна ітерація потребує розв'язування лінеаризованого диференціального рівняння, що ускладнює реалізацію та збільшує обсяг проміжних обчислень.

Інший напрям побудови двосторонніх методів ґрунтується на інтервальному аналізі [13]. Класичні інтервальні методи розв'язування звичайних диференціальних рівнянь, зокрема метод Мура, для отримання гарантованих включень розв'язку будують на основі інтервальних аналогів рядів Тейлора за часовою змінною. Основним обмеженням класичних інтервальних підходів є накопичення похибки на великих часових проміжках, що спричинене, зокрема, перемноженням інтервальних матриць. Крім того, ці методи потребують автоматичного диференціювання високих порядків, що суттєво ускладнює їх реалізацію [9, 10, 11].

У [1] запропонований метод пропонує ідею побудови двосторонніх наближень розв'язку задачі на основі математики функціональних інтервалів [2, 3, 6, 7, 8, 12]. Він не має недоліків методу Чаплигіна, і на відміну від інтервальних методів на основі інтервальних аналогів ряду Тейлора, не потребує автоматичного диференціювання. Крім цього, адаптивний вибір довжини кроку автоматично реагує на ступінь нелінійності задачі, а квадратична збіжність ширини апроксимації забезпечує ефектвне звуження невизначеності розв'язку на кожній ітерації.

Однак вибір довжини інтервалу $h = b_{i+1} - b_i$, де $b_1 = a$, b_{i+1} ($i = 0, 1, \dots, n-1$), $b_n = b$, що забезпечує задану точність ε ширини функціонального інтервалу на правій межі, у точці b_{i+1} здійснюється неявно. У разі, коли побудована ширина перевищує ε , алгоритм виконує максимумально допустиме ітераційне звуження лінійного функціонального інтервалу розв'язку без явної верхньої оцінки числа цих ітерацій. Це вимагає розв'язування додаткових проміжних задач Коші, що суттєво збільшує кількість ітерацій при реалізації базового алгоритму з [1].

У цій роботі аналізуючи нову запропоновану модифікацію базового алгоритму продовжено дослідження, розпочаті у [1]. В ній показано, що запропонований метод суттєво зменшує кількість кроків, необхідних для його реалізації, порівняно з методом з роботи [1] і не містить розглянутих нижче недоліків. Теоретичними основами нового алгоритму та його характеристик є висновки доведеної нижче в цій роботі теореми 1.

Постановка задачі та загальна схема її розв'язання. Нехай потрібно розв'язати інтегральне рівняння

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, s, y(s)) ds, \quad x \in [a, b] \quad (1)$$

де $f(x)$ – диференційована функція, λ – дійсний параметр, ядро $K(x, s, y)$ – інтегровне у відповідній області та задовольняє по змінній y умову Ліпшиця з константою $L > 0$.

Розв'язок рівняння (1) шукаємо у вигляді послідовності розв'язків цього ж рівняння у відповідно визначених точках b_i ($i = 0, 1, \dots, n$), $b_0 = a$, $b_n = b$, а на кожному проміжку $[b_i, b_{i+1}]$ розв'язок подається у вигляді параболічних функціональних інтервалів (параболічних паралелограмів [3, 5]).

Схема розв'язання. У [5] розглядається загальна початкова задача: потрібно знайти таку функцію $y = y(x)$, що задовольняє рівність

$$g(x) = F(x, y, y', \dots, y^{(k)}), \quad \text{у точці } x = a, y(a) = c,$$

де $y', \dots, y^{(k)}$ похідні цієї функції відповідних порядків. Зокрема, частинним випадком її є і інтегральне рівняння (1) (при $g(x) = y(x)$,

$F = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, s, y(s)) ds$, $c = f(a)$). Оскільки, за припущенням, функція $f(x)$ диференційовна, ядро $K(x, s, y(s))$ – інтегровне,

то існує похідна правої частини рівняння (1):

$$\left(f(x) + \int_a^x K(x, s, y(s)) ds \right)' = f'(x) + K(x, x, y(x))$$

Отже, існує і похідна $y'(x)$ шуканого розв'язку такої задачі Коші:

$$y'(x) = f'(x) + K(x, x, y(x)) \quad (2)$$

$$y(a) = f(a). \quad (3)$$

Отже розв'язок рівняння (1) можна знайти як розв'язок цієї задачі Коші за допомогою алгоритму з [5].

Для розв'язання задач такого типу у [5] запропоновано підхід на основі побудови лінійного функціонального інтервалу (ЛФІ) розв'язку, що містить дотичну до розв'язку у початковій точці. Підстановкою ЛФІ в ядро рівняння одержуємо ЛФІ похідної, а на основі обмежень на похідну будуємо параболічний паралелограм [3].

У [1] на цій основі запропоновано базовий алгоритм розв'язування рівняння (1). Суть полягає в наступному.

Алгоритм 1.

1. Вибираємо $b_i = a$.

2. Реалізуючи висновок леми 1 [3], вибираємо початковий лінійний функціональний інтервал (ЛФІ) розв'язку рівняння (1):

$$y(x) = \{ [a, b], \underline{k}x + \underline{m}, \bar{k}x + \bar{m} \} \quad (4)$$

такі щоб він містив дотичну $y(x) = y'(a)(x-a) + y(a)$ до шуканого розв'язку у точці $x = a$, де

$$\bar{k} = y'(a) + \delta, \underline{k} = y'(a) - \delta, \bar{m} = y(a) - \bar{k}a, \underline{m} = y(a) - \underline{k}a, \delta > 0.$$

$$\bar{m} = y(a) - \bar{k}a, \underline{m} = y(a) - \underline{k}a, \delta > 0. \quad (5)$$

Цю дотичну можна побудувати, оскільки у початковій точці $x = a$ значення $y(a)$ розв'язку $y(x)$ та його похідної $y'(x)$ відомі.

3. Визначаємо в інтервалі $[a, b]$ точку b_{i+1} , до якої, включно з нею, виконуються подвійні нерівності $\underline{k}'(x) \leq y'(x) \leq \bar{k}'(x)$ та $\underline{k}(x) \leq y''(x) \leq \bar{k}(x)$ (див. [3]).

3.1. Підставляємо ЛФІ (4) в ядро $K(\cdot)$ рівняння (1) та виконавши всі відповідні операції згідно його аналітичного виразу, одержуємо лінійний функціональний інтервал похідної шуканого розв'язку у вигляді таких списків значень:

- $\{x_i\}_{i=1}^m$ – список точок розбиття інтервалу $[a, b]$ характерними точками [2] ядра рівняння (1);

- $\{\bar{y}_i\}_{i=1}^m, \{\underline{y}_i\}_{i=1}^m$ – списки значень верхніх та нижніх кусково-лінійних обмежувальних функцій цього ЛФІ в точках розбиття;
- $\{\bar{k}_i\}_{i=1}^{m-1}, \{\underline{k}_i\}_{i=1}^{m-1}$ – списки кутових коефіцієнтів верхніх та нижніх, відповідно, кусково-лінійних обмежувальних функцій цього лінійного функціонального інтервалу;
- $\{\bar{m}_i\}_{i=1}^{m-1}, \{\underline{m}_i\}_{i=1}^{m-1}$ – списки коефіцієнтів зміщення верхніх та нижніх, відповідно, кусково-лінійних обмежувальних функцій цього лінійного функціонального інтервалу.

3.2. Зі списків $\{\bar{k}_i\}_{i=1}^{m-1}, \{\underline{k}_i\}_{i=1}^{m-1}, \{\bar{m}_i\}_{i=1}^{m-1}, \{\underline{m}_i\}_{i=1}^{m-1}$, вибираємо перші елементи $\bar{k}_1, \underline{k}_1, \bar{m}_1, \underline{m}_1$, відповідно, та будуємо прямі:

$$y_w(x) = \bar{k}_1 x + \bar{m}_1, \quad y_n(x) = \underline{k}_1 x + \underline{m}_1. \quad (6)$$

4. На основі отриманих прямих, згідно теореми 1 з [1], будуємо параболічний функціональний інтервал $\underline{p}_a(x) \leq y(x) \leq \bar{p}_a(x)$, $x \in [a, b_i]$, де:

$$\bar{p}_a(x) = y(a) + (\bar{k}_1 / 2)(x^2 - a^2) + \bar{m}_1(x - a), \quad (7)$$

$$\underline{p}_a(x) = y(a) + (\underline{k}_1 / 2)(x^2 - a^2) + \underline{m}_1(x - a), \quad (8)$$

5. Знаходимо значення $\bar{p}_a(x)$ та $\underline{p}_a(s)$, де $s = (a + b_i) / 2$ і будуємо параболи $\bar{p}_s(x)$ та $\underline{p}_s(x)$, де:

$$\bar{p}_s(x) = \bar{p}_a(s) + (\bar{k}_1 / 2)(x^2 - s^2) + \bar{m}_1(x - s) \quad (9)$$

$$\underline{p}_s(x) = \underline{p}_a(s) + (\underline{k}_1 / 2)(x^2 - s^2) + \underline{m}_1(x - s). \quad (10)$$

Параболи (9), (10) проходять через точки $(s, \bar{p}_a(s))$ та $(s, \underline{p}_a(s))$, відповідно.

6. Знаходимо значення $\bar{p}_s(b_i)$ та $\underline{p}_s(b_i)$ і парабол (9)–(10) у точці $x = b_i$, відповідно, і одержуємо інтервал $[\underline{p}_s(b_i), \bar{p}_s(b_i)]$, який гарантовано містить значення розв'язку $y(b_i)$ у точці b_i .

7. Обчислюємо функціональну невизначеність $\omega = \bar{p}_s(b_i) - \underline{p}_s(b_i)$ розв'язку рівняння (1) у точці $x = b_i$.

7.1. Якщо $\omega > \varepsilon$, де ε – задана бажана точність апроксимації розв'язку рівняння (1) у точці $x = b_i$, тоді будуємо інший гіпотетичний початковий інтервал $\{[b_{i-1}, b_i], \underline{l}(x)\}$, $i = 1, 2, \dots$ розв'язку рівняння (1),

послідовно обчислюючи кутові коефіцієнти та зміщення прямих $\underline{l}(x)$ та $\bar{l}(x)$ так. Обчислюємо кутові коефіцієнти прямих $\underline{l}(x)$, $\bar{l}(x)$, що проходять через точки $(a, y(a))$, $(s, \overline{p_a}(s))$, $(s, \underline{p_a}(s))$, відповідно:

$$\overline{\underline{k}} = \frac{\overline{p_a}(s) - y(a)}{s - a}, \quad \underline{\underline{k}} = \frac{\underline{p_a}(s) - y(a)}{s - a}. \quad (11)$$

Знаходимо

$$\overline{\delta} = \overline{\underline{k}} - y'(a), \quad \underline{\delta} = \underline{\underline{k}} - y'(a), \quad (12)$$

та

$$\delta = \max(|\overline{\delta}|, |\underline{\delta}|). \quad (13)$$

Будуємо новий початковий лінійний функціональний інтервал розв'язку рівняння (1). Тоді нові коефіцієнти обмежувальних функцій ЛФІ розв'язку будуть такими:

$$\overline{k}_{\text{new}} = y'(a) + \delta, \quad \overline{m}_{\text{new}} = y(a) - \overline{k}_{\text{new}} a, \quad (14)$$

$$\underline{k}_{\text{new}} = y'(a) - \delta, \quad \underline{m}_{\text{new}} = y(a) - \underline{k}_{\text{new}} a. \quad (15)$$

Переходимо до пункту 3.

7.2. Якщо функціональна невизначеність розв'язку рівняння (1) $\omega \leq \varepsilon$, то згідно з [3], $y(b_i) \cong (\underline{p}_s(b_i) + \overline{p}_s(b_i)) / 2$. Тому далі розв'язуємо нове інтегральне рівняння (1) на інтервалі $[b_i, b_{i+1}]$.

8. Якщо $b_{i+1} = b$, то кінець алгоритму.

В цьому алгоритмі ітераційне звуження ЛФІ розв'язку виконується без явної апріорної оцінки числа цих ітерацій. Однак висновки лем та теорем роботи [5] дають змогу модифікувати цей алгоритм так, щоб бажана точність ε апроксимації розв'язку рівняння на кінцях кожного проміжку $[b_i, b_{i+1}]$ досягалася за один крок алгоритму. Теоретичними основами запропонованої нижче модифікації є висновки Теорема 1.

Теорема 1. Нехай функція f один раз неперервно диференційовна на $[a, b]$, ядро $K(x, s, y)$ інтегровне у відповідній області та задовольняє умові Ліпшиця за змінною y зі сталою $L > 0$. Нехай на першому інтервалі $[a, b_1]$ існують лінійні функції $\overline{g}, \underline{g}$ вигляду (6), що проходять через спільну точку $(a, y'(a))$, такі що

$$\underline{g}(x) \leq y'(x) \leq \overline{g}(x), \quad x \in [a, b_1]. \quad (16)$$

Тоді:

Пункт 1). Якщо параболи \overline{p}_a , \underline{p}_a , (8) є первісними обмежувальних прямих \overline{g} , \underline{g} при початковій умові $y(x) = y(a)$, а параболи \overline{p}_s , \underline{p}_s (9), (10) проходять через точки $(s, \overline{p}_a(s))$, $(s, \underline{p}_a(s))$, відповідно, де $s = (a + b_1) / 2$, то ці чотири параболи утворюють параболічний паралелограм [3, 5], що містить розв'язок рівняння (1):

$$\underline{p}_s(x) \leq y(x) \leq \overline{p}_s(x), \quad x \in [a, b_1];$$

Пункт 2). функціональна невизначеність [4] $\omega(b_1) = |\overline{p}_s(b_1) - \underline{p}_s(b_1)|$ у правій межі b_1 інтервалу $[a, b_1]$ дорівнює

$$\omega(b_1) = \frac{\Delta K \cdot h^2}{4}, \quad (17)$$

де $h = b_1 - a$, $\Delta K = \overline{k}_1 - \underline{k}_1 > 0$;

Пункт 3). при заданій функціональній невизначеності ε розв'язку рівняння (1) у точці b_ε з проміжку $[a, b_1]$ крок розбиття

$$h_\varepsilon = 2\sqrt{\varepsilon / \Delta K} \quad (18)$$

забезпечує рівність $\omega(a + h_\varepsilon) = \varepsilon$ за одну побудову параболічного паралелограма;

Пункт 4). для рекурентно побудованої послідовності ЛФІ розв'язку з відхиленнями $\delta^{(i)} > 0$ ($i = 1, 2, \dots$), визначеної у виведенні нижче, за умови $C_{i+1} \geq C_i$ та $\tau_1 > \varepsilon$, для досягнення $\omega_{N_\varepsilon} \leq \varepsilon$ достатньо

$$N_\varepsilon = 1 + \log_2(\tau_1 / \varepsilon) / 6 \quad (19)$$

ітерацій.

Доведення.

Пункт 1). Інтегруючи нерівність (16) від a до x та використовуючи $y(a) = y_a$, згідно леми 1 з [5], отримуємо

$$\underline{p}_a(x) \leq y(x) \leq \overline{p}_a(x), \quad x \in [a, b_1],$$

оскільки \overline{p}_a , \underline{p}_a є первісними функцій \overline{g} , \underline{g} , відповідно, і \overline{g} , \underline{g} проходять через спільну точку $(a, y'(a))$, то $\overline{g}_1 - \underline{m}_1 = -Ka$. Тому

$$\overline{p}_a(x) - \underline{p}_a(x) = (K/2)(x^2 - a^2) - Ka(x - a) = (K/2)(x - a)^2. \quad (20)$$

Звідси маємо $\overline{p}_a(b_1) - \underline{p}_a(b_1) = Kh^2 / 2$, а у середній точці $s -$

$$\bar{p}_a(s) - \underline{p}_a(s) = \frac{K h^2}{8}. \quad (21)$$

Оскільки \bar{g}, \underline{g} лінійні функції, то $\bar{g}'(x) = \bar{k}_1$, $\underline{g}'(x) = \underline{k}_1$ сталі, отже диференціюванням (16) маємо

$$\underline{k}_1 \leq y''(x) \leq \bar{k}_1, \quad x \in [a, b_1], \quad (22)$$

тобто виконуються умови леми 2 з [5]. Тому, згідно з лемами 1, 2 та теоремами 1, 2 з [5], функціональний інтервал розв'язку задачі Коші (2), (3) існує і він є одночасно функціональним інтервалом розв'язку рівняння (1).

Врахувавши (9), (10), (21) та зробивши заміну змінних $u = x - s$, переконуємось, що рівняння $D_s(x) = \bar{p}_s(x) - \underline{p}_s(x)$ після підстановки (9), (10) та (21) із заміною $u = x - s$ набуває вигляду

$$D_s(u) = \Delta K \left(\frac{h^2}{8} - \frac{u^2}{2} - \frac{uh}{2} \right). \quad (23)$$

Оскільки $\Delta K \neq 0$, то рівняння $D_s = 0$ зводиться до $4u^2 + 4uh - h^2 = 0$. Додатний його корінь

$$u_* = \frac{h(\sqrt{2}-1)}{2},$$

Отже, параболи \bar{p}_s та \underline{p}_s перетинаються у точці:

$$x_* = s + u_* = a + \frac{h}{\sqrt{2}}. \quad (24)$$

Оскільки $1/\sqrt{2} < 1$, то $x_* \in (s, b_1)$, тобто перетин парабол $\underline{p}_s(x)$, $\bar{p}_s(x)$ відбувається в межах інтервалу $[a, b_1]$.

Пункт 2). Підставляючи (9), (10) у різницю

$$D(b_1) = \bar{p}_s(b_1) - \underline{p}_s(b_1) \quad (25)$$

Позначимо

$$\Delta k_1 = k_1 - \bar{k}_1, \quad \Delta m_1 = m_1 - \bar{m}_1.$$

Тоді різниця (25), враховуючи (9), (10), набуває такого вигляду:

$$D(b_1) = [\bar{p}_a(s) - \underline{p}_a(s)] + (\Delta k_1 / 2)(b_1^2 - s^2) + \Delta m_1(b_1 - s).$$

Аналогічно, врахувавши (7), (8), маємо

$$\bar{p}_a(s) - \underline{p}_a(s) = -(\Delta k_1 / 2)(s^2 - a^2) - \Delta m_1(s - a).$$

Оскільки $s = (a + b_1) / 2$, то

$$b_1 + a - 2s = 0, \quad b_1^2 + a^2 - 2s^2 = \frac{h^2}{2},$$

Отже $D(b_1) = \Delta k_1 \cdot h^2 / 4$. Тому

$$\omega(b_1) = |\Delta k_1| \cdot \frac{h^2}{4} = |\bar{k}_1 - \underline{k}_1| \cdot \frac{h^2}{4}.$$

Пункт 3). Из рівності (17) та того, що $\omega(b_\varepsilon) = \omega(a + h_\varepsilon) = \varepsilon$, безпосередньо отримуємо

$$h_\varepsilon = 2\sqrt{\varepsilon / |\bar{k}_1 - \underline{k}_1|}.$$

Пункт 4). Розглянемо рекурентно побудовану послідовність ЛФІ розв'язку з відхиленнями $\delta^{(i)} > 0$ ($i = 1, 2, \dots$), що визначається так. На ітерації i ЛФІ розв'язку має кутові коефіцієнти $\bar{k}^{(i)} = y'(b_i) + \delta^{(i)}$, $\underline{k}^{(i)} = y'(b_i) - \delta^{(i)}$ та проходить через $(b_i, y(b_i))$. Підстановкою цього ЛФІ в ядро рівняння (1) одержуємо ЛФІ похідної з обмежувальними прямими, що проходять через $(b_i, y'(b_i))$ з кутовими коефіцієнтами $\bar{k}_1^{(i)} \geq \underline{k}_1^{(i)}$. Інтервал $[b_i, b_{i+1}]$ визначається співвідношенням $C_i \cdot h^{(i)} = \delta^{(i)}$, де $h^{(i)} = b_{i+1} - b_i$, $C_i = \max\left(|\underline{k}_1^{(i)}|, |\bar{k}_1^{(i)}|\right)$, $\kappa^{(i)} = \bar{k}_1^{(i)} - \underline{k}_1^{(i)}$. Покладемо $\delta^{(i+1)} = C_i \cdot h^{(i)} / 4$, $\omega_i = \omega^{(i)}(b_{i+1})$ та $\tau_i := |\lambda| L \delta^{(i)} (h^{(i)})^2 / 2$.

За означенням послідовності, на ітерації i ЛФІ розв'язку має ширину

$$\left(\bar{k}^{(i)} - \underline{k}^{(i)}\right)(x - b_i) = 2\delta^{(i)}(x - b_i), \quad x \in [b_i, b_{i+1}].$$

Підстановка ЛФІ розв'язку в ядро з умовою Ліпшиця ядра дає

$$\kappa^{(i)} \leq 2|\lambda| L \delta^{(i)}. \quad (26)$$

Покажемо, що $\delta^{(i+1)} = \delta^{(i)} / 4$. Оскільки на ітерації i обмежувальні прямі ЛФІ похідної проходять через $(b_i, y'(b_i))$ з кутовими коефіцієнтами $\underline{k}_1^{(i)}$, $\bar{k}_1^{(i)}$, тобто

$$\bar{g}^{(i)}(x) = y'(b_i) + \bar{k}_1^{(i)}(x - b_i), \quad \underline{g}^{(i)}(x) = y'(b_i) + \underline{k}_1^{(i)}(x - b_i),$$

то верхня парабола (7), застосована до інтервалу $[b_i, b_{i+1}]$, набуває вигляду

$$\bar{p}_{b_i}^{(i)}(x) = y(b_i) + y'(b_i)(x - b_i) + \bar{k}_1^{(i)}(x - b_i)^2 / 2,$$

тому в середній точці $s^{(i)} = b_i + h^{(i)} / 2$

$$\bar{p}_{b_i}^{(i)}(s^{(i)}) - y(b_i) = y'(b_i)h^{(i)} / 2 + \bar{k}_1^{(i)}(h^{(i)})^2 / 8.$$

Кутовий коефіцієнт прямої через $(b_i, y(b_i))$ та $(s^{(i)}, \bar{p}_{b_i}^{(i)}(s^{(i)}))$ – це січна, нахил якої

$$\bar{k}^{(i)} = \frac{\bar{p}_{b_i}^{(i)}(s^{(i)}) - y(b_i)}{s^{(i)} - b_i} = y'(b_i) + \bar{k}_1^{(i)} h^{(i)} / 4.$$

Звідси відхилення $\bar{\delta}^{(i)} = \bar{k}_1^{(i)} h^{(i)} / 4$, аналогічно $|\underline{\delta}^{(i)}| = |\underline{k}_1^{(i)}| h^{(i)} / 4$.

За означенням

$$\delta^{(i+1)} = \max\left(\left|\bar{\delta}^{(i)}\right|, \left|\underline{\delta}^{(i)}\right|\right) = C_i \cdot h^{(i)} / 4.$$

Із співвідношення $C_i \cdot h^{(i)} = \delta^{(i)}$ маємо

$$\delta^{(i+1)} = \delta^{(i)} / 4, \quad h^{(i+1)} \cdot C_{i+1} = \delta^{(i+1)}. \quad (27)$$

Покажемо, що за умови $C_{i+1} \geq C_i$ виконується $h^{(i+1)} \leq h^{(i)} / 4$.

З (27) маємо

$$h^{(i+1)} = \delta^{(i+1)} / C_{i+1} = \delta^{(i)} / 4 C_{i+1} \leq \delta^{(i)} / 4 C_i = h^{(i)} / 4.$$

Оцінимо τ_i . З Пункту 2, застосованого до $[b_i, b_{i+1}]$, та з (26) маємо

$$\omega_i = \kappa^{(i)} (h^{(i)})^2 / 4 \leq |\lambda| L \delta^{(i)} (h^{(i)})^2 / 2 = \tau_i.$$

Тоді

$$\frac{\tau_{i+1}}{\tau_i} = \frac{\delta^{(i+1)}}{\delta^{(i)}} \cdot \left(\frac{h^{(i+1)}}{h^{(i)}}\right)^2 \leq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{64}.$$

Ітеруючи, $\tau_i \leq \tau_1 \cdot 64^{-(i-1)}$. З нерівності $\omega_i \leq \tau_i$ умова $\omega_{N_\varepsilon} \leq \varepsilon$ випливає з нерівності $\tau_1 \cdot 64^{-(N_\varepsilon - 1)} \leq \varepsilon$, тобто $N_\varepsilon \geq 1 + \log_2(\tau_1 / \varepsilon) / 6$, що дає рівність (19). Умова $C_{i+1} \geq C_i$ справджується для достатньо малих $\delta^{(1)}$ (зокрема при $L \delta^{(1)} < |y''(b_i)|$), оскільки $C_i \rightarrow |y''(b_i)|$ знизую при звуженні ЛФІ.

Теорема доведена.

Наслідок. Кожна ітерація пунктів 7-8 алгоритму 1 з [1] відповідає одній ітерації послідовності, описаної в умовах Теорема 1, з тими самими величинами $\delta^{(i)}, h^{(i)}, \kappa^{(i)}, \omega_i, C_i$. Тому за Пунктом 4 Теорема 1 базовий алгоритм 1 з [1] досягає точності ε на кожному інтервалі за щонайбільше N_ε ітерацій пунктів 7-8. Запропонований модифікований алгоритм 2 (див. нижче) замінює усі ці проміжні ітерації однією побудовою параболічного паралелограма із кроком h_ε за формулою (18) і забезпечує точну рівність $\omega(b_i) = \varepsilon$ між кожними парами точок кінців інтервалів $[b_i, b_{i+1}]$ за одну побудову лінійного функціонального інтервалу ядра інтегрального рівняння (1).

Алгоритм 2.

1. Виконуємо пункт 1 алгоритму 1 і вибираємо початковий ЛФІ розв'язку (4) з коефіцієнтами, обчисленими за (5).

2. Визначаємо в інтервалі $[a, b]$ точку b_i , до якої, включно з нею, виконується подвійна нерівність

$$\underline{g}(x) \leq y'(x) \leq \bar{g}(x).$$

Для цього:

Виконуємо пункт 2 алгоритму 1 і одержуємо ЛФІ похідної підстановкою ЛФІ розв'язку в ядро рівняння (1). Будуємо обмежувальні прямі (6) та визначаємо b_i як меншу з двох точок перетину цих прямих з горизонтальними прямими \bar{k} та \underline{k} , відповідно.

3. На основі одержаних прямих (6) формуємо параболічний функціональний інтервал. Для цього будуємо параболу (7), (8), які забезпечують таку подвійну нерівність:

$$\underline{p}_a(x) \leq y(x) \leq \bar{p}_a(x), \text{ для всіх } x \in [a, b_i].$$

4. Знаходимо значення $\bar{p}_a(s)$ та $\underline{p}_a(s)$ парабол (7), (8) у середній точці $s = (a + b_i) / 2$ та за формулами (9), (10) будуємо параболу $\bar{p}_s(x)$ та $\underline{p}_s(x)$, що проходять через точки $(s, \bar{p}_a(s))$ та $(s, \underline{p}_a(s))$, відповідно.

5. Обчислюємо значення парабол (9), (10) у точці $x = b_i$ та одержуємо інтервал $[\underline{p}_s(b_i), \bar{p}_s(b_i)]$ і, відповідно, функціональну невизначеність $\omega = \bar{p}_s(b_i) - \underline{p}_s(b_i)$ розв'язку рівняння (1) у точці $x = b_i$.

6. Якщо функціональна невизначеність

$$\omega = \bar{p}_s(b_i) - \underline{p}_s(b_i) \leq \varepsilon,$$

де ε – задана бажана ширина двосторонньої апроксимації розв’язку рівняння (1) у цій точці, тоді згідно з [3],

$$y(b_i) \cong (\bar{p}_s(b_i) + \underline{p}_s(b_i)) / 2,$$

і переходимо на пункт 1 цього алгоритму, розв’язуючи інтегральне рівняння (2), але вже на інтервалі $[b_i, b_{i+1}]$.

7. Якщо ж $\omega > \varepsilon$, тоді обчислюємо крок h_ε за формулою (18) та покладаємо

$$b_i' = a + h_\varepsilon, \quad s' = (a + b_i') / 2.$$

Знаходимо значення парабол (7), (8) у новій середній точці s' та одержуємо параболи (9), (10), які вже проходять через нові точки $(s', \bar{p}_a(s'))$ та $(s', \underline{p}_a(s'))$. Покладаємо, згідно [3],

$$y(b_i') \cong (\bar{p}_{s'}(b_i') + \underline{p}_{s'}(b_i')) / 2.$$

і переходимо на пункт 1 цього алгоритму, розв’язуючи інтегральне рівняння (2), але вже на інтервалі $[b_i', b_{i+1}]$.

8. Якщо при виконанні пункту 6 або пункту 7 цього алгоритму отримуємо рівність $b_i' = b$, то кінець алгоритму.

Числові експерименти. Для апробації запропонованого модифікованого алгоритму 2 розглянуто дві тестові задачі. Усі обчислення виконано в арифметиці довільної точності (BigDecimal, 16 значущих цифр); початкове відхилення $\delta = 1,5$.

Приклад 1. На проміжку $[1, 2]$ побудувати гарантовані двосторонні апроксимації розв’язку інтегрального рівняння

$$y(x) = 1 + \int_1^x 2\sqrt{y(s)} ds$$

у вигляді кусково-квадратичного функціонального інтервалу, забезпечуючи у точках розбиття даного інтервалу гарантоване зменшення функціональної невизначеності розв’язку із заданою точністю $\varepsilon \leq 10^{-6}$.

Точним аналітичним розв’язком рівняння прикладу 1 є $y(x) = x^2$. Тут

$$|\lambda| = 1, K(x, y(x)) = 2\sqrt{y}, \partial K(x, y) / \partial y = 1 / \sqrt{y};$$

на першому інтервалі

$$y \geq y(a) - \delta \cdot h \approx 0,45,$$

звідки

$$L = 1 / \sqrt{0,45} \approx 1,5, \quad |\lambda|L = 1,5.$$

За формулою (18) на першому інтервалі $h_\varepsilon = 1,153 \cdot 10^{-3}$, $b'_1 = a + h_\varepsilon = 1,0011532865$, що згідно з (17) забезпечує рівність $\omega(b'_1) = \varepsilon$.

Таблиця 1
 Двостороння кусково-параболічна апроксимація розв'язку прикладу 1,
 одержана базовим алгоритмом на проміжку $[a, b]$

№	b_{i-1}	b_i	$\bar{p}_s(b_i)$	$\underline{p}_s(b_i)$	ω	$y(b_i)$	N_ε
1	1,000000	1,001398	1,002797	1,002797	$6,2 \cdot 10^{-9}$	1,002797	4
2	1,001398	1,003261	1,006532	1,006532	$1,5 \cdot 10^{-8}$	1,006532	3
3	1,003261	1,004785	1,009593	1,009593	$8,3 \cdot 10^{-9}$	1,009593	3
4	1,004785	1,010327	1,020761	1,020761	$4,4 \cdot 10^{-7}$	1,020761	3
5	1,010327	1,015857	1,031966	1,031965	$4,0 \cdot 10^{-7}$	1,031965	3
⋮							
$n-4$	1,998008	1,998257	3,993026	3,993026	$2,3 \cdot 10^{-11}$	3,993026	2
$n-3$	1,998257	1,998475	3,993897	3,993897	$1,6 \cdot 10^{-11}$	3,993897	2
$n-2$	1,998475	1,998666	3,994659	3,994659	$1,4 \cdot 10^{-8}$	3,994659	1
$n-1$	1,998666	1,998832	3,995326	3,995326	$1,0 \cdot 10^{-8}$	3,995326	1
n	1,998832	2,000000	3,999994	3,999994	$5,1 \cdot 10^{-7}$	3,999994	1

тут b_{i-1} – ліва межа інтервалу; b_i – права межа; $\bar{p}_s(b_i)$, $\underline{p}_s(b_i)$ – значення парабол (9), (10) на правій межі інтервалу $[b_{i-1}, b_i]$, $\omega = \bar{p}_s(b_i) - \underline{p}_s(b_i)$ – функціональна невизначеність у точці b_i , $y(b_i)$ – значення розв'язку у точці b_i , n – загальна кількість інтервалів розбиття інтервалу $[a, b]$.

Таблиця 2
 Двостороння кусково-параболічна апроксимація розв'язку прикладу 1,
 одержана модифікованим алгоритмом на проміжку $[a, b]$

№	b_{i-1}	b_i	$\bar{p}_s(b_i)$	$\underline{p}_s(b_i)$	ω	$y(b_i)$	N_ε
1	1,000000	1,001155	1,002311	1,002310	$1,0 \cdot 10^{-6}$	1,002310	1
2	1,001155	1,002310	1,004626	1,004625	$10,0 \cdot 10^{-7}$	1,004625	1

Продовження таблиці 2

3	1,002310	1,003466	1,006944	1,006943	$10,0 \cdot 10^{-7}$	1,006944	1
4	1,003466	1,004622	1,009267	1,009266	$1,0 \cdot 10^{-6}$	1,009266	1
5	1,004622	1,005780	1,011593	1,011592	$1,0 \cdot 10^{-6}$	1,011593	1
⋮							
$n-4$	1,995642	1,996186	3,984759	3,984759	$1,1 \cdot 10^{-7}$	3,984759	1
$n-3$	1,996186	1,996663	3,986662	3,986662	$8,5 \cdot 10^{-8}$	3,986662	1
$n-2$	1,996663	1,997078	3,988322	3,988321	$6,5 \cdot 10^{-8}$	3,988321	1
$n-1$	1,997078	1,998710	3,994842	3,994841	$1,0 \cdot 10^{-6}$	3,994842	1
n	1,998710	2,000000	4,000000	3,999999	$6,2 \cdot 10^{-7}$	4,000000	1

В цій таблиці використані такі ж позначення як і в таблиці 1.

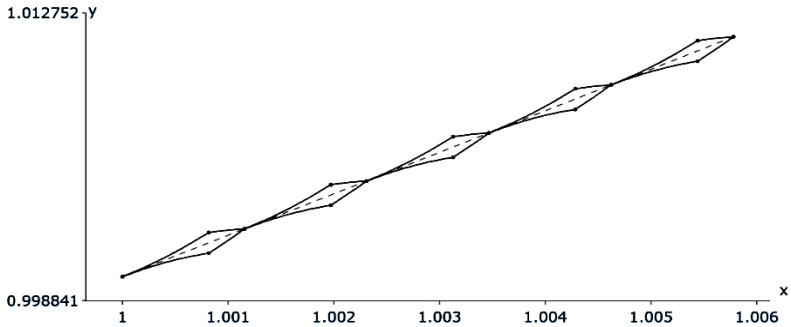


Рис. 1. Графіки кусково-параболічних обмежувальних функцій і розв'язку прикладу 1 на перших n 'ятьох інтервалах розбиття інтервалу $[a, b]$

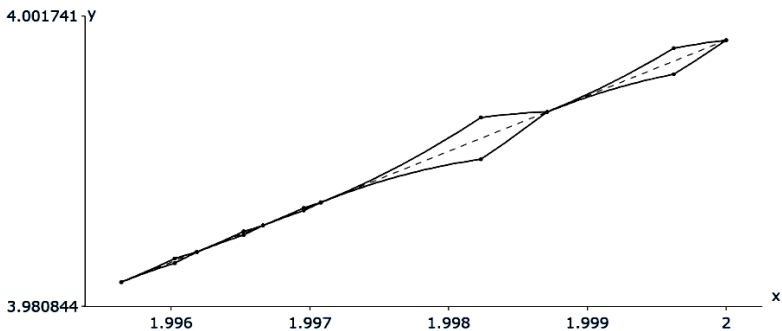


Рис. 2. Графіки кусково-параболічних обмежувальних функцій і розв'язку прикладу 1 на останніх n 'ятьох інтервалах розбиття інтервалу $[a, b]$

На рисунках 1, 2 суцільними лініями зображено графіки обмежувальних парабол \bar{p}_a (7), \underline{p}_a (8), \bar{p}_s (9), \underline{p}_s (10), а пунктирною сірою лінією – точний розв’язок $y(x)$ рівняння.

Приклад 2. На проміжку $[0,1]$ побудувати гарантовані двосторонні апроксимації розв’язку інтегрального рівняння

$$y(x) = x \cdot 2^x - \int_0^x 2^{x-s} y(s) ds$$

у вигляді кусково-квадратичного функціонального інтервалу, забезпечуючи у точках розбиття даного інтервалу гарантоване зменшення функціональної невизначеності розв’язку із заданою точністю $\varepsilon \leq 10^{-6}$.

Точним аналітичним розв’язком рівняння прикладу 2 є $y(x) = 2^x (1 - e^{-x})$. Тут

$$|\lambda| = 1, K(x, y(x)) = 2^{x-s} \cdot y, \partial K(x, y(x)) / \partial y = 2^{x-s},$$

$$L = \max_{[0,1] \times [0,1]} 2^{x-s} = 2, \quad |\lambda|L = 2.$$

За формулою (18) на першому інтервалі $h_\varepsilon = 1,394 \cdot 10^{-3}$, $b'_1 = a + h_\varepsilon = 0,0013940923$, що згідно з (17) забезпечує рівність $\omega(b'_1) = \varepsilon$.

Таблиця 3

Двостороння кусково-параболічна апроксимація розв’язку прикладу 2, одержана базовим алгоритмом на проміжку $[a, b]$

№	b_{i-1}	b_i	$\bar{p}_s(b_i)$	$\underline{p}_s(b_i)$	ω	$y(b_i)$	N_ε
1	0,000000	0,007682	0,007694	0,007694	$5,7 \cdot 10^{-8}$	0,007694	5
2	0,007682	0,022677	0,022777	0,022777	$4,5 \cdot 10^{-7}$	0,022777	4
3	0,022677	0,037454	0,037727	0,037727	$4,3 \cdot 10^{-7}$	0,037727	4
4	0,037454	0,042668	0,043024	0,043024	$1,8 \cdot 10^{-8}$	0,043024	4
5	0,042668	0,055541	0,056146	0,056147	$3,1 \cdot 10^{-7}$	0,056146	3
⋮							
$n-4$	1,000000	1,000000	1,264230	1,264230	$1,4 \cdot 10^{-14}$	1,264230	1
$n-3$	1,000000	1,000000	1,264231	1,264231	$3,6 \cdot 10^{-15}$	1,264231	1
$n-2$	1,000000	1,000000	1,264231	1,264231	$1,0 \cdot 10^{-15}$	1,264231	1

Продовження таблиці 3

$n-1$	1,000000	1,000000	1,264231	1,264231	$2,0 \cdot 10^{-16}$	1,264231	1
n	1,000000	1,000000	1,264231	1,264231	$5,0 \cdot 10^{-16}$	1,264231	1

В цій таблиці використані такі ж позначення як і в таблиці 1.

Таблиця 4

Двостороння кусково-параболічна апроксимація розв'язку прикладу 2, одержана модифікованим алгоритмом на проміжку $[a, b]$

№	b_{i-1}	b_i	$\bar{p}_s(b_i)$	$\underline{p}_s(b_i)$	ω	$y(b_i)$	N_ε
1	0,000000	0,001387	0,001388	0,001387	$1,0 \cdot 10^{-6}$	0,001388	1
2	0,001387	0,002775	0,002777	0,002776	$10,0 \cdot 10^{-7}$	0,002776	1
3	0,002775	0,004162	0,004166	0,004165	$10,0 \cdot 10^{-7}$	0,004165	1
4	0,004162	0,005549	0,005556	0,005555	$1,0 \cdot 10^{-6}$	0,005555	1
5	0,005549	0,006937	0,006946	0,006945	$1,0 \cdot 10^{-6}$	0,006946	1
⋮							
$n-4$	0,999999	1,000000	1,264241	1,264241	$5,0 \cdot 10^{-14}$	1,264241	1
$n-3$	1,000000	1,000000	1,264241	1,264241	$1,3 \cdot 10^{-14}$	1,264241	1
$n-2$	1,000000	1,000000	1,264241	1,264241	$2,7 \cdot 10^{-15}$	1,264241	1
$n-1$	1,000000	1,000000	1,264241	1,264241	$4,0 \cdot 10^{-16}$	1,264241	1
n	1,000000	1,000000	1,264241	1,264241	$1,4 \cdot 10^{-15}$	1,264241	1

В цій таблиці використані такі ж позначення як і в таблиці 1.

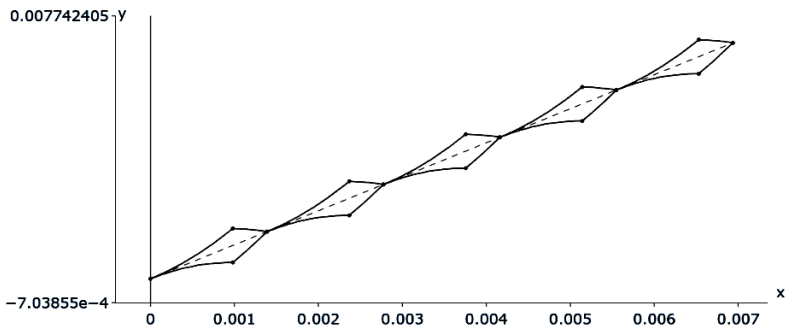


Рис. 3. Графіки кусково-параболічних обмежувальних функцій і розв'язку прикладу 2 на перших n 'ятьох інтервалах розбиття інтервалу $[a, b]$

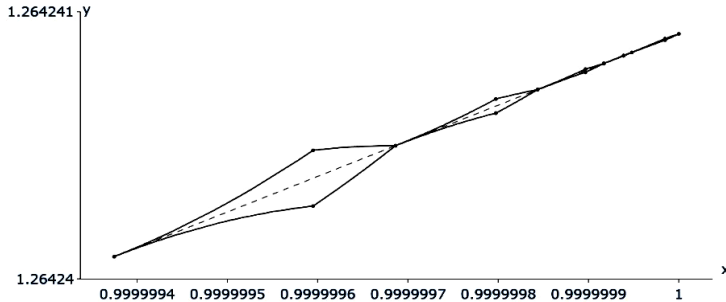


Рис. 4. Графіки кусково-параболічних обмежувальних функцій і розв'язку прикладу 2 на останніх n ятьох інтервалах розбиття інтервалу $[a, b]$

На цих рисунках використані такі ж позначення як і на рисунках 1-2.

Висновки. У роботі сформульовано і доведено теорему, яка ґрунтує коректність запропонованого модифікованого алгоритму розв'язування інтегрального рівняння вказаного виду. Виведено тождество (17) для функціональної невизначеності параболічного паралелограма у правій межі інтервалу, явний вираз (18) кроку розбиття h_ε , який забезпечує досягнення заданої точності ε за одну побудову, та у випадку виконання умови Ліпшица ядра – логарифмічну оцінку (19) числа ітерацій пунктів 7-8 базового алгоритму з [1]. Запропонований модифікований алгоритм замінює всі N_ε ітерацій однією побудовою параболічного паралелограма із кроком h_ε . Результати числових експериментів підтверджують отримані теоретичні висновки та коректність запропонованого алгоритму.

Список використаних джерел:

1. Сеньо П. С., Заяць А. Р. Ітераційний двосторонній метод розв'язування інтегральних рівнянь. *Вісник Львівського університету. Серія прикладна математика та інформатика*. 2026. Вип. 36. С. 255-265. DOI: 10.30970/vam.2026.36.14038.
2. Сеньо П. С. Арифметика лінійних функціональних інтервалів. *Вісник Львівського університету. Серія прикладна математика та інформатика*. 2014. Вип. 21. С. 38-57. DOI: 10.30970/vam.2014.21.8541.
3. Сеньо П. С. Двосторонні методи розв'язування задачі Коші на підставі математики функціональних інтервалів. *Вісник Львівського університету. Серія прикладна математика та інформатика*. 2017. Вип. 25. С. 18-37. DOI: 10.30970/vam.2017.25.8475.
4. Senio P. S. Matrix representation of Taylor's formula for mappings in finite dimensional spaces. *Математичні Студії*. 2019. Т. 51, № 1. С. 92-106. DOI: 10.15330/ms.51.1.92-106.

5. Сеньо П. С. Застосування математики функціональних інтервалів для розв'язування деяких типів загальної початкової задачі. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки*. 2026. Вип. 29. С. 134-150. DOI: 10.32626/2308-5878.2026-29.134-150.
6. Сеньо П. С. Топологія простору лінійних функціональних інтервалів. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки*. 2014. Вип. 11. С. 209-223. DOI: 10.32626/2308-5878.2014-11.209-223.
7. Сеньо П. С. Деякі застосування математики функціональних інтервалів. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки*. 2016. Вип. 13. С. 182-193. DOI: 10.32626/2308-5878.2016-13.182-193.
8. Сеньо П. С. Методи локалізації функціональних невизначеностей для аналізу систем: автореф. дис. ... д-ра фіз.-мат. наук: 01.05.04 – системний аналіз і теорія оптимальних рішень. Київ: Київ. нац. ун-т імені Тараса Шевченка, 2019. 36 с.
9. Lin Y., Stadtherr M. A. Validated solutions of initial value problems for parametric ODEs. *Applied Numerical Mathematics*. 2007. Vol. 57, № 10. P. 1145-1162. DOI: 10.1016/j.apnum.2006.10.006.
10. Duracz J., Farjudian A., Konečný M., Taha W. Function Interval Arithmetic. *Mathematical Software – ICMS 2014: 4th International Congress, Seoul, Korea*. Cham: Springer, 2014. P. 677-684. (Lecture Notes in Computer Science; vol. 8592). DOI: 10.1007/978-3-662-44199-2_101.
11. Gu D.-K., Liu L.-W., Duan G.-R. Functional interval observer for the linear systems with disturbances. *IET Control Theory & Applications*. 2018. Vol. 12, № 18. P. 2562-2568. DOI: 10.1049/iet-cta.2018.5113.
12. Сеньо П. С. Методи розв'язування граничних задач на основі математики функціональних інтервалів. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки*. 2018. Вип. 17. С. 133-144. DOI: 10.32626/2308-5878.2018-17.133-144.
13. Alefeld G., Herzberger J. Introduction to Interval Computations. New York: Academic Press, 1983. 352 p.

References:

1. Seno P. S., Zaiats A. R. Iteratsiyni dvostoronniy metod rozv'iazuvannya intehralnykh rivnian. *Visnyk Lvivskoho universytetu. Seriiia prykladna matematyka ta informatyka*. 2026. Vol. 36. P. 255-265. DOI: 10.30970/vam.2026.36.14038.
2. Seno P. S. Aryfmetryka liniinykh funksiionalnykh intervaliv. *Visnyk Lvivskoho universytetu. Seriiia prykladna matematyka ta informatyka*. 2014. Vol. 21. P. 38-57. DOI: 10.30970/vam.2014.21.8541.
3. Seno P. S. Dvostoronni metody rozv'iazuvannya zadachi Koshi na pidstavi matematyky funksiionalnykh intervaliv. *Visnyk Lvivskoho universytetu. Seriiia prykladna matematyka ta informatyka*. 2017. Vol. 25. P. 18-37. DOI: 10.30970/vam.2017.25.8475.
4. Senio P. S. Matrix representation of Taylor's formula for mappings in finite dimensional spaces. *Matematychni Studii*. 2019. T. 51, № 1. P. 92-106. DOI: 10.15330/ms.51.1.92-106.
5. Seno P. S. Zastosuvannya matematyky funksiionalnykh intervaliv dlia rozv'iazuvannya deiakykh typiv zahalnoi pochatkovoї zadachi. *Matematychnie*

- ta kompiuterne modeliuвання. *Seriia: Fyzyko-matematychni nauky*. 2026. Vol. 29. P. 134-150. DOI: 10.32626/2308-5878.2026-29.134-150.
6. Seno P. S. Topolohiia prostoru liniinykh funktsionalnykh intervaliv. *Matematychna ta kompiuterne modeliuвання. Seriia: Fyzyko-matematychni nauky*. 2014. Vol. 11. P. 209-223. DOI: 10.32626/2308-5878.2014-11.209-223.
 7. Seno P. S. Deiaki zastosuvannya matematyky funktsionalnykh intervaliv. *Matematychna ta kompiuterne modeliuвання. Seriia: Fyzyko-matematychni nauky*. 2016. Vol. 13. P. 182-193. DOI: 10.32626/2308-5878.2016-13.182-193.
 8. Seno P. S. Metody lokalizatsii funktsionalnykh nevyznachenosti dlia analizu system: avtoref. dys. ... d-ra fiz.-mat. nauk: 01.05.04 – systemnyi analiz i teoriia optymalnykh rishen. Kyiv: Kyiv. nats. un-t imeni Tarasa Shevchenka, 2019. 36 p.
 9. Lin Y., Stadtherr M. A. Validated solutions of initial value problems for parametric ODEs. *Applied Numerical Mathematics*. 2007. Vol. 57, № 10. P. 1145-1162. DOI: 10.1016/j.apnum.2006.10.006.
 10. Duracz J., Farjudian A., Konečný M., Taha W. Function Interval Arithmetic. *Mathematical Software – ICMS 2014: 4th International Congress, Seoul, Korea*. Cham: Springer, 2014. P. 677-684. (Lecture Notes in Computer Science; vol. 8592). DOI: 10.1007/978-3-662-44199-2_101.
 11. Gu D.-K., Liu L.-W., Duan G.-R. Functional interval observer for the linear systems with disturbances. *IET Control Theory & Applications*. 2018. Vol. 12, № 18. P. 2562-2568. DOI: 10.1049/iet-cta.2018.5113.
 12. Seno P. S. Metody rozviazuvannya hranychnykh zadach na osnovi matematyky funktsionalnykh intervaliv. *Matematychna ta kompiuterne modeliuвання. Seriia: Fyzyko-matematychni nauky*. 2018. Vol. 17. P. 133-144. DOI: 10.32626/2308-5878.2018-17.133-144.
 14. Alefeld G., Herzberger J. Introduction to Interval Computations. New York: Academic Press, 1983. 352 p.

MODIFICATION OF THE BASIC TWO-SIDED METHOD FOR SOLVING INTEGRAL EQUATIONS

The research considers the problem of constructing guaranteed two-sided approximations of the solution of an integral equation of a certain kind. Classical methods typically yield only approximation of the solution at the certain points, but at other points there are general theoretical approximations without rigorous error bounds, whereas for problems with uncertainty in parameters or initial conditions it is essentially important to obtain upper and lower bounds that definitely contain the sought solution. Classical interval methods for solving such equations based on interval analogues of the Taylor series require automatic differentiation of high orders and are characterized by the accumulation of error on large intervals, that significantly complicates their practical application. In [1] it presents an iterative two-sided algorithm for solving equations of aforesaid form based on the mathematics of functional intervals with quadratic convergence, in which, however, the choice of the interval length that provides the given accuracy and the number of iterations of narrowing the linear functional in-

terval of the solution are determined implicitly. In this paper a theorem is proved that yields an estimate for the functional uncertainty of the two-sided approximation at the right boundary of the interval, an explicit expression of the partition step ensuring the prescribed accuracy of the approximation in a single construction, and a logarithmic estimate of the number of iterations of narrowing of the linear functional interval of the solution on given interval by the basic algorithm of [1]. Based on this proven theorem, a modified algorithm is proposed that provides the desired narrowing of the two-sided approximation of the desired solution in one step. The algorithm is tested on two numerical experiments, which results confirm the theoretical conclusions. This substantially reduces the number of algorithm iterations.

Key words: *functional intervals, integral equations, two-sided approximations, parabolic parallelogram, mathematical modelling, system analysis.*