

УДК 517.927.4:517.988.8

DOI: 10.32626/2308-5878.2026-30.5-30

Гвоздев М. І.

ORCID: 0000-0003-4022-9777,

Харківський національний університет радіоелектроніки,
м. Харків, Україна,

E-mail: mykyta.hvozdev@nure.ua

Сидоров М. В.

ORCID: 0000-0001-8022-866X,

д-р фіз.-мат. наук, професор, Харківський національний
університет радіоелектроніки, м. Харків, Україна,

E-mail: maxim.sidorov@nure.ua

МЕТОД ДВОБІЧНИХ НАБЛИЖЕНЬ У ЧИСЕЛЬНОМУ АНАЛІЗІ ЗАДАЧІ НАВ'Є, ЩО Є МАТЕМАТИЧНОЮ МОДЕЛЛЮ ОДНОВИМІРНОЇ МІКРОЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ

У статті розглядається крайова задача для напівлінійного звичайного диференціального рівняння четвертого порядку (задача Нав'є), що описує статичний прогин мікробалки в мікроелектромеханічних системах під дією електростатичних сил. В основі дослідження цієї задачі лежить її зведення до еквівалентного інтегрального рівняння або системи інтегральних рівнянь Гаммерштейна, які аналізуються методами теорії нелінійних операторів у напівупорядкованих банахових просторах.

Першим способом від вихідної крайової задачі здійснено перехід до інтегрального рівняння Гаммерштейна шляхом побудови функції Гріна звичайного диференціального оператора четвертого порядку з умовами Нав'є. У другий спосіб спочатку здійснено перехід до першої крайової задачі для системи звичайних напівлінійних рівнянь з наступною її заміною системою рівнянь Гаммерштейна. При цьому використовуються функції Гріна звичайних диференціальних операторів другого порядку з першими крайовими умовами. Досліджено властивості нелінійних операторів, що відповідають отриманим рівнянням і системі рівнянь. Зокрема, встановлено, що кожен з цих операторів є додатним, ізотонним, ліпшиць-неперервним, неперервним та цілком неперервним.

Запропоновано дві схеми методу двобічних наближень. Вибір саме цього методу обґрунтовується тим, що він дозволяє

Стаття надійшла до редакції: 25.05.2026

Рекомендовано до друку: 26.05.2026

Оприлюднено (online): 29.05.2026

Ця стаття розповсюджується на умовах ліцензії CC Attribution-NonCommercial-NoDerivatives 4.0

не лише будувати наближений розв'язок, а й дозволяє теоретично встановлювати умови його існування та єдиності. Також перевагою методу двобічних наближень є наявність зручної апостеріорної оцінки похибки.

Отримано умови збіжності кожної з запропонованих схем до єдиного на інваріантному конусному відрізку розв'язку вихідної крайової задачі. Для аналізу ефективності алгоритмів проведено низку обчислювальних експериментів для різних значень параметрів задачі. Виконано порівняльний аналіз отриманих результатів та надано практичні рекомендації.

Ключові слова: мікробалка, задача Нав'є, ізотонний оператор, інваріантний конусний відрізок, крайова задача, математичне моделювання, мікроелектромеханічна система, метод двобічних наближень, напівлінійне звичайне диференціальне рівняння четвертого порядку, прогин, рівняння Гаммерштейна, функція Гріна, чисельні методи, шарнірне обтірання.

Вступ. Сучасний розвиток мікро- та наноелектроніки зумовлює зростаючий інтерес до мікроелектромеханічних систем (МЕМС), які поєднують у собі механічні та електричні компоненти на мікромасштабному рівні. Такі системи широко застосовуються у сенсорних технологіях, медичних пристроях, телекомунікаціях, автомобільній промисловості та системах Інтернету речей [7, 8, 11, 14-18]. Завдяки високій чутливості, малим розмірам та низькому енергоспоживанню МЕМС стали невід'ємною складовою сучасних інженерних рішень.

Однією з ключових проблем при проектуванні МЕМС є забезпечення їхньої надійності та стабільності роботи в умовах дії електростатичних сил. Особливу роль відіграє явище так званої pull-in нестійкості, яке полягає у раптовому притягненні рухомого елемента (мікромембрани або мікробалки) до нерухомого електрода при досягненні критичного значення прикладеної напруги. Це явище призводить до втрати працездатності пристрою, тому його передбачення є принципово важливим етапом проектування.

Експериментальне дослідження таких ефектів є складним через малі геометричні розміри та високу вартість виготовлення прототипів. У зв'язку з цим особливого значення набуває математичне моделювання, яке дозволяє адекватно описувати поведінку МЕМС, прогнозувати критичні режими та оптимізувати параметри конструкції без проведення численних фізичних експериментів.

Отже, актуальною науковою задачею є розробка нових та удосконалення існуючих методів математичного моделювання та чисельного аналізу МЕМС. Зазвичай як математичні моделі статичних мікро- та наноелектромеханічних систем використовують крайові задачі для напівлінійних еліптичних рівнянь другого або четвертого

порядку, застосовуючи до їх чисельного аналізу, наприклад, метод скінченних елементів [19, 20], метод Гальоркіна [13, 21] або методи двобічних наближень [1-3, 5, 6, 9, 10]. Методи останнього класу засновані на результатах теорії нелінійних операторів у напівупорядкованих банахових просторах [4, 12] та є більш зручними для практичного використання, бо дозволяють на кожному кроці ітераційного процесу мати гарантовану оцінку похибки наближеного розв'язку задачі.

Метою роботи є подальший розвиток ітераційних методів двобічних наближень розв'язування одновимірних крайових задач для напівлінійних звичайних диференціальних рівнянь четвертого порядку, що є математичними моделями МЕМС. Для досягнення поставленої мети необхідно виконати наступні завдання:

- для задачі Нав'є відносно безрозмірного прогину побудувати ітераційні методи двобічних наближень на основі використання функції Гріна та теорії нелінійних операторів у напівупорядкованих просторах;
- провести обчислювальні експерименти для тестових задач.

Дана робота продовжує дослідження, що розпочаті в [5].

Постановка задачі. Розглянемо тонку мікробалку (верхній електрод) довжини $2l$, що шарнірно опирається на краях і знаходиться на відстані d від нерухомого електрода (рис. 1). Нехай $w(\xi)$ – прогин балки (м), ξ – просторова координата (м), $\xi \in [-l; l]$. Зрозуміло, що $0 \leq w(\xi) < d$. Нехай далі V – напруга (В), E – модуль Юнга (Па), I – момент інерції перерізу (м⁴), T – натяг (ефективна сила розтягу) (Н), ε_0 – діелектрична проникність (Ф/м), $F(\xi)$ – профіль, що визначає неоднорідність електростатичного поля. Шарнірне опираювання означає, що на краях мікробалки дорівнюють нулю прогин та згинаючий момент або кривина.

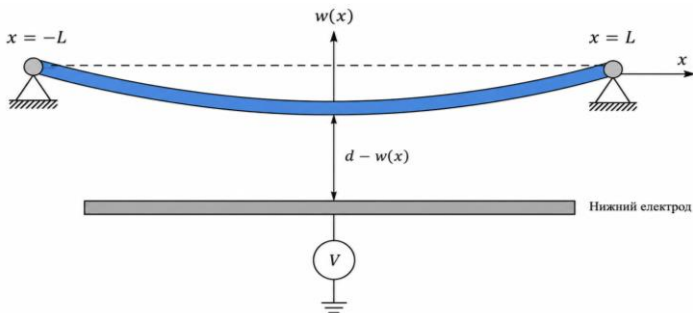


Рис. 1. Схема МЕМС

Повна енергія цієї мікроелектромеханічної системи дорівнюватиме сумі енергії згину, енергії натягу та електростатичної енергії:

$$\mathcal{E}[w] = \int_{-L}^L \left(\frac{EI}{2} w''^2(\xi) + \frac{T}{2} w'^2(\xi) - \frac{\varepsilon_0 V^2}{2} \frac{F(\xi)}{d - w(\xi)} \right) d\xi.$$

Необхідна умова мінімуму функціонала $\mathcal{E}[w]$ (рівняння Ейлера-Пуассона) з урахування умов шарнірного обпирання кінців мікробалики приводить до наступної крайової задачі

$$EIw^{IV}(\xi) - Tw''(\xi) = \frac{\varepsilon_0 V^2 F(\xi)}{2(d - w(\xi))^2}, \quad \xi \in (-l; l), \quad (1)$$

$$w(-l) = w''(-l) = 0, \quad w(l) = w''(l) = 0. \quad (2)$$

Переходячи у (1), (2) до безрозмірних змінних x і u за формулами $x = \frac{\xi}{l}$, $u(x) = \frac{w(\xi)}{d}$, отримаємо задачу

$$u^{IV}(x) - \frac{TI^2}{EI} u''(x) = \frac{\varepsilon_0 V^2 l^4}{2EI d^3} \cdot \frac{F(lx)}{(1-u)^2}, \quad x \in (-1; 1),$$

$$u(-1) = u''(-1) = 0, \quad u(1) = u''(1) = 0.$$

Позначимо $\kappa^2 = \frac{TI^2}{EI}$, $\lambda = \frac{\varepsilon_0 V^2 l^4}{2EI d^3}$, $f(x) = F(lx)$. Отже, розглядатимемо наступну крайову задачу Нав'є

$$u^{IV}(x) - \kappa^2 u''(x) = \frac{\lambda f(x)}{(1-u(x))^2}, \quad x \in (-1; 1), \quad (3)$$

$$u(-1) = u''(-1) = 0, \quad u(1) = u''(1) = 0. \quad (4)$$

При цьому $0 \leq u(x) < 1$ для всіх $x \in [-1; 1]$.

Крайова задача (3), (4) є крайовою задачею для напівлінійного диференціального рівняння четвертого порядку з сингулярною нелінійністю. Зазвичай вважають, що $f(x) \geq 0$ на $[-1; 1]$, $f \in C[-1; 1]$ і $\max_{x \in [-1; 1]} f(x) = 1$.

Метод розв'язання. Задачу (3), (4) аналізуватимемо методом двобічних наближень двома способами. Перший спосіб базуватиметься на безпосередньому переході (методом функцій Гріна) від задачі (3), (4) до еквівалентного інтегрального рівняння Гаммерштейна (цей підхід у випадку $f(x) = 1$ до задачі (3), (4) було запропоновано у роботі [5]). Другим способом крайова задача (3), (4) спочатку зведеться до крайової задачі для системи рівнянь, а потім отримана система (знову таки методом функцій Гріна) буде замінена еквівалентною системою інтегральних рівнянь Гаммерштейна.

Перший спосіб. Функція Гріна $G(x, s)$ крайової задачі (3), (4) є невід'ємною для всіх $-1 \leq x, s \leq 1$ і має вигляд [5]

$$G(x, s) = \begin{cases} \frac{(1+x)(1-s)}{2\kappa^2} - \frac{sh\kappa(1+x)sh\kappa(1-s)}{\kappa^3 sh2\kappa}, & -1 \leq x \leq s, \\ \frac{(1+s)(1-x)}{2\kappa^2} - \frac{sh\kappa(1+s)sh\kappa(1-x)}{\kappa^3 sh2\kappa}, & s \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Тоді задача (3), (4) еквівалентна інтегральному рівнянню Гаммерштейна

$$u(x) = \lambda \int_{-1}^1 \frac{G(x, s)f(s)}{(1-u(s))^2} ds. \quad (5)$$

Рівняння (5) розглядатимемо у банаховому просторі $C[-1; 1]$ неперервних на відрізку $[-1; 1]$ функцій з нормою $\|u\| = \max_{x \in [-1; 1]} |u(x)|$. Простір $C[-1; 1]$ будемо вважати напівопорядкованим за допомогою конуса $\mathcal{K}_+ = \{u \in C[-1; 1] : u(x) \geq 0, x \in [-1; 1]\}$ невід'ємних функцій: $v \leq w$ за конусом \mathcal{K}_+ , якщо $w - v \in \mathcal{K}_+$. Отже, $v \leq w$, якщо $v(x) \leq w(x)$ для всіх $x \in [-1; 1]$.

Узагальненим розв'язком крайової задачі (3), (4) назвемо функцію $u^* \in \mathcal{K}_+$, що є розв'язком інтегрального рівняння (5).

Увівий нелінійний інтегральний оператор T , що діє у $C[-1; 1]$ за правилом

$$T(u)(x) = \lambda \int_{-1}^1 \frac{G(x, s)f(s)}{(1-u(s))^2} ds, \quad (6)$$

рівняння (5) можна записати у вигляді $u = T(u)$ і звести проблему знаходження узагальненого розв'язку задачі (3), (4) до задачі про нерухому точку оператора T .

Властивості оператора T викладені в наступній лемі.

Лема 1. *Якщо $0 \leq u(x) \leq 1 - \eta$ для всіх $x \in [-1; 1]$ ($\eta > 0$ – дотить мале), то оператор T вигляду (6) є:*

- a) додатним;
- б) ізотонним;
- в) лінійно-неперервним;
- г) неперервним та цілком неперервним.

Доведення. а) Додатність оператора T означає, що він залишає інваріантним конус \mathcal{K}_+ , тобто $T(u) \in \mathcal{K}_+$, якщо $u \in \mathcal{K}_+$. Це безпосе-

редньо впливає з невід'ємності та неперервності (за зроблених припущень) підінтегральної функції у (6).

б) Ізотонність оператора T означає, що з нерівності $v \leq w$ випливає нерівність $T(v) \leq T(w)$. Тоді ця властивість є наслідком монотонного зростання за u функції $\frac{1}{(1-u)^2}$ для $0 \leq u \leq 1-\eta$ і невід'ємності підінтегральної функції у (6).

в) Оскільки

$$\left| \frac{1}{(1-v)^2} - \frac{1}{(1-w)^2} \right| \leq \frac{2}{\eta^3} |v-w|,$$

то

$$\begin{aligned} \|T(v) - T(w)\| &= \max_{x \in [-1; 1]} |T(v)(x) - T(w)(x)| = \\ &= \lambda \max_{x \in [-1; 1]} \left| \int_{-1}^1 G(x, s) f(s) \left[\frac{1}{(1-v(s))^2} - \frac{1}{(1-w(s))^2} \right] ds \right| \leq \\ &\leq \frac{2\lambda M}{\eta^3} \max_{x \in [-1; 1]} |v(s) - w(s)| = \frac{2\lambda M}{\eta^3} \|v - w\|, \end{aligned}$$

де $M = \max_{x \in [-1; 1]} \int_{-1}^1 G(x, s) f(s) ds$, $M > 0$.

Отже,

$$\|T(v) - T(w)\| \leq L \|v - w\|,$$

де $L = \frac{2\lambda M}{\eta^3}$.

г) Неперервність та повна неперервність оператора T також безпосередньо впливають з невід'ємності та неперервності (за зроблених припущень) підінтегральної функції у (6).

Лемму доведено.

Для ізотонного оператора T вигляду (6) дослідимо тепер питання існування інваріантного конусного відрізка $\langle v_0, w_0 \rangle$, тобто такої множини $\langle v_0, w_0 \rangle = \{u \in C[-1; 1] : v_0 \leq u \leq w_0\}$, що

$$T(\langle v_0, w_0 \rangle) \subset \langle v_0, w_0 \rangle.$$

Кінці v_0, w_0 цього відрізка виділимо умовами $T(v_0) \geq v_0$, $T(w_0) \leq w_0$. Якщо покласти $v_0(x) = 0$, $w_0(x) = \beta$ ($0 < \beta < 1$), то ці умови набудуть вигляду

$$\lambda \int_{-1}^1 G(x, s) f(s) ds \geq 0 \text{ для всіх } x \in [-1; 1], \quad (7)$$

$$\frac{\lambda}{(1-\beta)^2} \int_{-1}^1 G(x,s)f(s)ds \leq \beta \text{ для всіх } x \in [-1; 1]. \quad (8)$$

Очевидно, що умова (7) завжди виконується, а умову (8) можна записати у вигляді

$$\beta(1-\beta)^2 \geq \lambda M. \quad (9)$$

Аналіз нерівності (9) показує, що для $0 < \beta < 1$ вона:

- не має розв'язків, якщо $\lambda M > \frac{4}{27}$;
- виконується лише для $\beta = \frac{1}{3}$, якщо $\lambda M = \frac{4}{27}$;
- виконується для $\beta \in [\underline{\beta}, \bar{\beta}]$, де $0 < \underline{\beta} < \frac{1}{3} < \bar{\beta} < 1$, якщо $\lambda M < \frac{4}{27}$.

Отже, ізотонний оператор T вигляду (6) має інваріантний конусний відрізок $< 0, \beta >$, якщо

$$\lambda \leq \frac{4}{27M}. \quad (10)$$

Обираючи за початкове наближення кінці інваріантного конусного відрізка $< 0, \beta >$, сформуємо ітераційний процес за схемою

$$\begin{aligned} v^{(k+1)} &= T(v^{(k)}), \quad w^{(k+1)} = T(w^{(k)}), \quad k = 1, 2, \dots, \\ v^{(0)} &= 0, \quad w^{(0)} = \beta, \end{aligned}$$

тобто

$$v^{(k+1)}(x) = \lambda \int_{-1}^1 \frac{G(x,s)f(s)}{(1-v^{(k)}(s))^2} ds, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (11)$$

$$w^{(k+1)}(x) = \lambda \int_{-1}^1 \frac{G(x,s)f(s)}{(1-w^{(k)}(s))^2} ds, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (12)$$

$$v^{(0)}(x) = 0, \quad w^{(0)}(x) = \beta. \quad (13)$$

З ізотонності оператора T та інваріантності конусного відрізка $< 0, \beta >$ випливає ланцюг нерівностей

$$0 \leq v^{(1)}(x) \leq v^{(2)}(x) \leq \dots \leq v^{(k)}(x) \leq \dots \leq w^{(k)}(x) \leq \dots \leq w^{(2)}(x) \leq w^{(1)}(x) \leq \beta,$$

а з нормальності конуса \mathcal{K}_+ та повної неперервності оператора T випливає існування границь $v^*(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} v^{(k)}(x)$, $w^*(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} w^{(k)}(x)$,

причому $v^* \leq w^*$ і v^*, w^* – нерухомі точки оператора T .

Якщо $v, w \in < 0, \beta >$, то з властивості ліпшищ-неперервності впливає оцінка $\|T(v) - T(w)\| \leq L\|v - w\|$, де $L = \frac{2\lambda M}{(1 - \beta)^3}$. Тоді

$$\begin{aligned} \|w^{(k+1)} - v^{(k+1)}\| &= \|T(w^{(k)}) - T(v^{(k)})\| \leq L\|w^{(k)} - v^{(k)}\| \leq \dots \leq \\ &\leq L^{k+1}\|w^{(0)} - v^{(0)}\| = L^{k+1}\beta, \end{aligned}$$

тобто

$$\|w^{(k+1)} - v^{(k+1)}\| \leq L^{k+1}\beta. \quad (14)$$

Якщо за β обрати $\underline{\beta}$ – найменший корінь рівняння $\beta(1 - \beta)^2 = \lambda M$, $0 < \underline{\beta} < \frac{1}{3}$, то для $\lambda < \frac{4}{27M}$

$$L = \frac{2\lambda M}{(1 - \underline{\beta})^3} < 1.$$

Переходячи у (14) до границі, коли $k \rightarrow \infty$, отримаємо, що

$$0 \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \|w^{(k+1)} - v^{(k+1)}\| = \|w^* - v^*\| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} L^{k+1}\beta = 0,$$

тобто $\|w^* - v^*\| = 0$, а отже, $v^* = w^*$.

Таким чином, має місце наступне твердження.

Теорема 1. Нехай $\lambda < \frac{4}{27M}$ і β – найменший корінь рівняння

$$\beta(1 - \beta)^2 = \lambda M, \text{ де } M = \max_{x \in [-1; 1]} \int_{-1}^1 G(x, s) f(s) ds. \text{ Тоді крайова задача}$$

(3), (4) має єдиний на $< 0, \beta >$ додатний розв'язок $u^*(x)$, до якого двобічно збігається ітераційний процес (11)-(13).

Характер збіжності ітерацій (11)-(13) дає можливість мати на кожному кроці ітераційного процесу гарантовану двобічну оцінку $v^{(k)} \leq u^* \leq w^{(k)}$. Якщо ж за наближений розв'язок на k -й ітерації обрати

$$u^{(k)}(x) = \frac{v^{(k)}(x) + w^{(k)}(x)}{2} - \text{середину конусного відрізка } < v^{(k)}, w^{(k)} >, \text{ то}$$

$$\|u^{(k)} - u^*\| \leq \frac{1}{2} \max_{x \in [-1; 1]} [w^{(k)}(x) - v^{(k)}(x)].$$

Таким чином, з точністю ε можна вважати $u^*(x) \approx u^{(k)}(x)$, якщо

$$\max_{x \in [-1; 1]} [w^{(k)}(x) - v^{(k)}(x)] \leq 2\varepsilon,$$

що є зручним критерієм закінчення обчислень.

Крім того, кожен з конусних відрізків $\langle v^{(k)}, w^{(k)} \rangle$ є апіорною оцінкою розв'язку крайової задачі (3), (4), зокрема, конусній відрізок $\langle v^{(1)}, w^{(1)} \rangle$ (оцінка $u^* \in \langle 0, \beta \rangle$ є певною мірою тривіальною): для всіх $x \in [-1; 1]$

$$\lambda \int_{-1}^1 G(x, s) f(s) ds \leq u^*(x) \leq \frac{\lambda}{(1-\beta)^2} \int_{-1}^1 G(x, s) f(s) ds.$$

Другий спосіб. У задачі (3), (4) зробимо заміну $u_1 = u$, $u_2 = -u''$.

Тоді вона набуде вигляду

$$-u_1'' = u_2, \quad x \in (-1; 1), \quad (15)$$

$$-u_2''(x) + \kappa^2 u_2(x) = \frac{\lambda f(x)}{(1-u_1(x))^2}, \quad x \in (-1; 1), \quad (16)$$

$$u_1(-1) = 0, \quad u_1(1) = 0, \quad (17)$$

$$u_2(-1) = 0, \quad u_2(1) = 0. \quad (18)$$

Отже, крайова задача (3), (4) зведена до першої крайової задачі (15)-(18) для системи напівлінійних звичайних диференціальних рівнянь.

Функція Гріна першої крайової задачі для оператора $-u''$ на відрізьку $[-1; 1]$ має вигляд

$$G(x, s) = \begin{cases} \frac{(1+x)(1-s)}{2}, & -1 \leq x \leq s, \\ \frac{(1+s)(1-x)}{2}, & s \leq x \leq 1, \end{cases}$$

а функція Гріна першої крайової задачі для оператора $-u'' + \kappa^2 u$ на відрізьку $[-1; 1]$ має вигляд

$$G^{(\kappa)}(x, s) = \begin{cases} \frac{sh\kappa(1+x)sh\kappa(1-s)}{\kappa sh 2\kappa}, & -1 \leq x \leq s, \\ \frac{sh\kappa(1+s)sh\kappa(1-x)}{\kappa sh 2\kappa}, & s \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Тоді задача (15)-(18) еквівалентна системі інтегральних рівнянь Гаммерштейна

$$u_1(x) = \int_{-1}^1 G(x, s) u_2(s) ds, \quad (19)$$

$$u_2(x) = \lambda \int_{-1}^1 \frac{G^{(\kappa)}(x, s) f(s)}{(1-u_1(s))^2} ds. \quad (20)$$

Систему рівнянь (19), (20) розглядатимемо у банаховому просторі $\mathcal{C}_2[-1; 1] = \mathcal{C}([-1; 1]; \mathbb{R}^2)$ неперервних на відрізку $[-1; 1]$ двовимірних вектор-функцій $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ з нормою

$$\|\mathbf{u}\|_2 = \max \{ \|u_1\|, \|u_2\| \} = \max \left\{ \max_{x \in [-1; 1]} |u_1(x)|, \max_{x \in [-1; 1]} |u_2(x)| \right\}.$$

Простір $\mathcal{C}_2[-1; 1]$ напівупорядкуємо за допомогою конуса $\mathcal{K}_+ = \{ \mathbf{u} \in \mathcal{C}_2[-1; 1] : u_1(x) \geq 0, u_2(x) \geq 0, x \in [-1; 1] \}$ невід'ємних двовимірних вектор-функцій функцій: $\mathbf{v} \leq \mathbf{w}$ за конусом \mathcal{K}_+ , якщо $\mathbf{w} - \mathbf{v} \in \mathcal{K}_+$. Отже, запис $\mathbf{v} \leq \mathbf{w}$, де $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$, означає, що $v_1(x) \leq w_1(x)$ і $v_2(x) \leq w_2(x)$ для всіх $x \in [-1; 1]$.

Узагальненим розв'язком крайової задачі (15)-(18) назвемо вектор-функцію $\mathbf{u}^* \in \mathcal{K}_+$, що є розв'язком системи інтегральних рівнянь (19), (20).

Введемо у розгляд нелінійний інтегральний оператор \mathbf{T} , що діє у $\mathcal{C}_2[-1; 1]$ за правилом

$$\mathbf{T}(\mathbf{u})(x) = \left(\int_{-1}^1 G(x, s) u_2(s) ds, \lambda \int_{-1}^1 \frac{G^{(\kappa)}(x, s) f(s)}{(1 - u_1(s))^2} ds \right). \quad (21)$$

Тоді система рівнянь (19), (20) запишеться у вигляді $\mathbf{u} = \mathbf{T}(\mathbf{u})$ і проблема знаходження узагальненого розв'язку задачі (15) – (18) зведеться до задачі про нерухому точку оператора \mathbf{T} .

Оператор \mathbf{T} має властивості, викладені в наступній лемі.

Лема 2. *Якщо $0 \leq u_1(x), u_2(x) \leq 1 - \eta$ для всіх $x \in [-1; 1]$ ($\eta > 0$ – досить мале), то оператор \mathbf{T} вигляду (21) є:*

- a) додатним;
- б) ізотонним;
- в) лінійно-неперервним;
- г) неперервним та цілком неперервним.

Доведення. а) Додатність оператора \mathbf{T} безпосередньо впливає з невід'ємності та неперервності (за зроблених припущень) підінтегральних функцій у (21).

б) Ізотонність оператора \mathbf{T} є наслідком монотонного зростання за u функцій u і $\frac{1}{(1-u)^2}$ для $0 \leq u \leq 1 - \eta$ і невід'ємності підінтегральних функцій у (21).

в) Маємо

$$\|\mathbf{T}(\mathbf{v}) - \mathbf{T}(\mathbf{w})\|_2 = \max \left\{ \max_{x \in [-1; 1]} \int_{-1}^1 G(x, s) [v_2(s) - w_2(s)] ds, \right. \\ \left. \lambda \max_{x \in [-1; 1]} \int_{-1}^1 G^{(\kappa)}(x, s) f(s) \left[\frac{1}{(1 - v_1(s))^2} - \frac{1}{(1 - w_1(s))^2} \right] ds \right\}.$$

Оскільки

$$\max_{x \in [-1; 1]} \int_{-1}^1 G(x, s) [v_2(s) - w_2(s)] ds \leq M \|v_2 - w_2\|,$$

$$\text{де } \tilde{M} = \max_{x \in [-1; 1]} \int_{-1}^1 G(x, s) ds, \text{ а}$$

$$\max_{x \in [-1; 1]} \int_{-1}^1 G^{(\kappa)}(x, s) f(s) \left[\frac{1}{(1 - v_1(s))^2} - \frac{1}{(1 - w_1(s))^2} \right] ds \leq \frac{2M^{(\kappa)}}{\eta^3} \|v_1 - w_1\|,$$

$$\text{де } M^{(\kappa)} = \max_{x \in [-1; 1]} \int_{-1}^1 G^{(\kappa)}(x, s) f(s) ds, \text{ то}$$

$$\|\mathbf{T}(\mathbf{v}) - \mathbf{T}(\mathbf{w})\|_2 \leq \max \left\{ \tilde{M} \|v_2 - w_2\|, \frac{2\lambda M^{(\kappa)}}{\eta^3} \|v_1 - w_1\| \right\} \leq L \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|_2,$$

$$\text{де } L = \max \left\{ \tilde{M}, \frac{2\lambda M^{(\kappa)}}{\eta^3} \right\}.$$

г) Неперервність та повна неперервність оператора \mathbf{T} також безпосередньо випливають з невід'ємності та неперервності (за зроблених припущень) підінтегральних функцій у (21).

Лему доведено.

Тепер для ізотонного оператора \mathbf{T} вигляду (21) дослідимо питання існування інваріантного конусного відрізка $\langle \mathbf{v}_0, \mathbf{w}_0 \rangle$, де $\mathbf{v}_0 = (v_{0,1}, v_{0,2})$, $\mathbf{w}_0 = (w_{0,1}, w_{0,2})$. Покладемо $v_{0,1}(0) = 0$, $v_{0,2}(x) = \gamma u_0(x)$, $w_{0,1}(x) = \beta$, $w_{0,2}(x) = \delta u_0(x)$, де $u_0(x) = 1 - x^2$, $0 < \gamma < \delta$, $0 < \beta < 1$. Тоді умови $\mathbf{T}(\mathbf{v}_0) \geq \mathbf{v}_0$, $\mathbf{T}(\mathbf{w}_0) \leq \mathbf{w}_0$, що виділяють інваріантний конусний відрізок, набудуть вигляду

$$\gamma \int_{-1}^1 G(x, s) u_0(s) ds \geq 0 \text{ для всіх } x \in [-1; 1], \quad (22)$$

$$\lambda \int_{-1}^1 G^{(\kappa)}(x, s) f(s) ds \geq \gamma u_0(x) \text{ для всіх } x \in [-1; 1], \quad (23)$$

$$\delta \int_{-1}^1 G(x, s) u_0(s) ds \leq \beta \text{ для всіх } x \in [-1; 1], \quad (24)$$

$$\frac{\lambda}{(1-\beta)^2} \int_{-1}^1 G^{(\kappa)}(x, s) f(s) ds \leq \delta u_0(x) \text{ для всіх } x \in [-1; 1]. \quad (25)$$

Умова (22), очевидно, завжди виконується, а умови (23)-(25) можна записати у вигляді

$$\gamma \leq \lambda m_1, \quad \delta M_1 \leq \beta, \quad \delta(1-\beta)^2 \geq \lambda M_2, \quad (26)$$

де

$$m_1 = \min_{x \in [-1; 1]} \int_{-1}^1 \frac{G^{(\kappa)}(x, s) f(s)}{u_0(x)} ds,$$

$$M_1 = \max_{x \in [-1; 1]} \int_{-1}^1 G(x, s) u_0(s) ds, \quad M_2 = \max_{x \in [-1; 1]} \int_{-1}^1 \frac{G^{(\kappa)}(x, s) f(s)}{u_0(x)} ds.$$

Зрозуміло, що $m_1, M_1, M_2 > 0$.

З першої з нерівностей (26) маємо, що

$$0 < \gamma \leq \lambda m_1.$$

Друга та третя нерівності (26) утворюють систему відносно β і δ , що не залежить від γ . З другої нерівності (26) $\delta \leq \frac{\beta}{M_1}$ і, підсилюючи третю нерівність, отримаємо, що $\lambda M_1 M_2 \leq \beta(1-\beta)^2$. Остання нерівність для $0 < \beta < 1$:

- не має розв'язків, якщо $\lambda M_1 M_2 > \frac{4}{27}$;
- виконується лише для $\beta = \frac{1}{3}$, якщо $\lambda M_1 M_2 = \frac{4}{27}$;
- виконується для $\beta \in [\underline{\beta}, \bar{\beta}]$, де $0 < \underline{\beta} < \frac{1}{3} < \bar{\beta} < 1$, якщо $\lambda M_1 M_2 < \frac{4}{27}$.

Отже, для $\lambda \leq \frac{4}{27 M_1 M_2}$ оператор \mathbf{T} має інваріантний конусний відрізок $\langle (0, \gamma u_0), (\beta, \delta u_0) \rangle$, де $0 < \gamma \leq \lambda m_1$, $\underline{\beta} \leq \beta \leq \bar{\beta}$ ($\underline{\beta}$, $\bar{\beta}$ – відповідно найменший і найбільший при $0 < \beta < 1$ корені рівняння $\lambda M_1 M_2 = \beta(1-\beta)^2$), $\frac{\lambda M_2}{(1-\beta)^2} \leq \delta \leq \frac{\beta}{M_1}$.

Починаючи з кінців інваріантного конусного відрізка $\langle (0, \gamma u_0), (\beta, \delta u_0) \rangle$, сформуємо ітераційний процес за схемою

$$v_1^{(k+1)}(x) = \int_{-1}^1 G(x, s) v_2^{(k)}(s) ds, \quad k = 1, 2, \dots \quad (27)$$

$$v_2^{(k+1)}(x) = \lambda \int_{-1}^1 \frac{G^{(k)}(x, s) f(s)}{(1 - v_1^{(k)}(s))^2} ds, \quad k = 1, 2, \dots \quad (28)$$

$$w_1^{(k+1)}(x) = \int_{-1}^1 G(x, s) w_2^{(k)}(s) ds, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (29)$$

$$w_2^{(k+1)}(x) = \lambda \int_{-1}^1 \frac{G^{(k)}(x, s) f(s)}{(1 - w_1^{(k)}(s))^2} ds, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (30)$$

$$v_1^{(0)}(x) = 0, \quad v_2^{(0)}(x) = \gamma u_0(x), \quad w_1^{(0)}(x) = \beta, \quad w_2^{(0)}(x) = \delta u_0(x). \quad (31)$$

З ізотонності оператора \mathbf{T} та інваріантності конусного відрізка $\langle (0, \gamma u_0), (\beta, \delta u_0) \rangle$ випливають ланцюги нерівностей

$$\begin{aligned} 0 \leq v_1^{(1)}(x) \leq v_1^{(2)}(x) \leq \dots \leq v_1^{(k)}(x) \leq \dots \leq w_1^{(k)}(x) \leq \dots \leq w_1^{(2)}(x) \leq w_1^{(1)}(x) \leq \beta, \\ \gamma u_0(x) \leq v_2^{(1)}(x) \leq v_2^{(2)}(x) \leq \dots \leq v_2^{(k)}(x) \leq \dots \\ \dots \leq w_2^{(k)}(x) \leq \dots \leq w_2^{(2)}(x) \leq w_2^{(1)}(x) \leq \delta u_0(x), \end{aligned}$$

а з нормальності конуса \mathcal{K}_+ та повної неперервності оператора \mathbf{T} випливає існування границь $\mathbf{v}^*(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{v}^{(k)}(x)$, $\mathbf{w}^*(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{w}^{(k)}(x)$, причому $\mathbf{v}^* \leq \mathbf{w}^*$ і $\mathbf{v}^* = (v_1^*, v_2^*)$, $\mathbf{w}^* = (w_1^*, w_2^*)$ – нерухомі точки оператора \mathbf{T} .

Нехай $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \langle (0, \gamma u_0), (\beta, \delta u_0) \rangle$. Тоді з ліпшіц-неперервності оператора \mathbf{T} випливає оцінка $\|\mathbf{T}(\mathbf{v}) - \mathbf{T}(\mathbf{w})\|_2 \leq L \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|_2$, де

$$L = \max \left\{ \tilde{M}, \frac{2\lambda M^{(k)}}{(1 - \beta)^3} \right\}, \text{ а отже,}$$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{w}^{(k+1)} - \mathbf{v}^{(k+1)}\|_2 &= \|\mathbf{T}(\mathbf{w}^{(k)}) - \mathbf{T}(\mathbf{v}^{(k)})\|_2 \leq L \|\mathbf{w}^{(k)} - \mathbf{v}^{(k)}\|_2 \leq \dots \leq \\ &\leq L^{k+1} \|\mathbf{w}^{(0)} - \mathbf{v}^{(0)}\|_2 = L^{k+1} \max\{\beta, \delta - \gamma\}. \end{aligned}$$

тобто

$$\|\mathbf{w}^{(k+1)} - \mathbf{v}^{(k+1)}\|_2 \leq L^{k+1} \max\{\beta, \delta - \gamma\}, \quad (32)$$

де $\mathbf{v}^{(k+1)} = (v_1^{(k+1)}, v_2^{(k+1)})$, $\mathbf{w}^{(k+1)} = (w_1^{(k+1)}, w_2^{(k+1)})$.

Якщо $L < 1$, то переходячи у (32) до границі, коли $k \rightarrow \infty$, отримаємо, що

$$0 \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{w}^{(k+1)} - \mathbf{v}^{(k+1)}\|_2 = \|\mathbf{w}^* - \mathbf{v}^*\|_2 \leq \lim_{k \rightarrow \infty} L^{k+1} \max\{\beta, \delta - \gamma\} = 0,$$

тобто $\|w^* - v^*\| = 0$, а отже, $v^* = w^*$.

Оскільки $\tilde{M} = \frac{1}{2}$, то умову $L < 1$ можна замінити умовою $\frac{2\lambda M^{(k)}}{(1-\beta)^3} < 1$, або, якщо за β обрати $\underline{\beta}$ – найменший корінь рівняння

$\lambda M_1 M_2 = \beta(1-\beta)^2$, $0 < \underline{\beta} < \frac{1}{3}$, то для $\lambda < \frac{4}{27M_1 M_2}$ отримаємо умову

$$\frac{M^{(k)}}{M_1 M_2} < 1.$$

Також з нерівності (32) бачимо, що для швидшої збіжності потрібно обрати найбільше значення γ і найменше можливе значення δ , тобто $\gamma = \lambda m_1$, $\delta = \frac{\lambda M_2}{(1-\underline{\beta})^2}$.

Таким чином, має місце наступне твердження.

Теорема 2. Нехай $\lambda < \frac{4}{27M_1 M_2}$, β – найменший корінь рівня-

ня $\lambda M_1 M_2 = \beta(1-\beta)^2$, $\gamma = \lambda m_1$, $\delta = \frac{\lambda M_2}{(1-\beta)^2}$ і $\frac{2\lambda M^{(k)}}{(1-\beta)^3} < 1$, де

$$m_1 = \min_{x \in [-1; 1]} \int_{-1}^1 \frac{G^{(k)}(x, s) f(s)}{u_0(x)} ds,$$

$$M_1 = \max_{x \in [-1; 1]} \int_{-1}^1 G(x, s) u_0(s) ds, \quad M_2 = \max_{x \in [-1; 1]} \int_{-1}^1 \frac{G^{(k)}(x, s) f(s)}{u_0(x)} ds,$$

$$M^{(k)} = \max_{x \in [-1; 1]} \int_{-1}^1 G^{(k)}(x, s) f(s) ds.$$

Тоді крайова задача (3), (4) має єдиний на $< 0, \beta >$ додатний розв'язок $u^*(x)$, причому ітераційний процес (27)-(31) двобічно збігається до $(u^*, -u^{**})$.

Через двобічний характер збіжності процесу (27)-(31) ми на кожному його кроці маємо гарантовану двобічну оцінку $v_1^{(k)} \leq u^* \leq w_1^{(k)}$, а також $v_2^{(k)} \leq -u^{**} \leq w_2^{(k)}$. Обираючи за наближений розв'язок на k -й ітерації $u^{(k)}(x) = \frac{v_1^{(k)}(x) + w_1^{(k)}(x)}{2}$, маємо, що

$$\|u^{(k)} - u^*\| \leq \frac{1}{2} \max_{x \in [-1; 1]} [w_1^{(k)}(x) - v_1^{(k)}(x)].$$

Отже, якщо

$$\max_{x \in [-1; 1]} [w_1^{(k)}(x) - v_1^{(k)}(x)] \leq 2\varepsilon,$$

то з точністю ε можна вважати, що $u^*(x) \approx u^{(k)}(x)$.

Апріорна розв'язку крайової задачі (3), (4) (використовуючи конусний відрізок $\langle \mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{w}^{(1)} \rangle$) може бути записана у вигляді: для всіх $x \in [-1; 1]$

$$\gamma \int_{-1}^1 G(x, s) u_0(s) ds \leq u^*(x) \leq \delta \int_{-1}^1 G(x, s) u_0(s) ds.$$

Також ітераційний процес (27)-(31) дає можливість двобічно наблизити і $-u^{**}$.

Обчислювальний експеримент. Обчислювальний експеримент проведено при виборі $f(x) = |x|^\alpha$ для різних значень κ і $\alpha \geq 0$. Такий вигляд функції $f(x)$ відповідає випадку, коли на $[-1; 1]$ електроди розташовані ближче до країв, а центр майже не навантажений.

В таблиці 1 наведено порогові значення $\lambda'_{\max} = \frac{4}{27M}$ і $\lambda''_{\max} = \frac{4}{27M_1M_2}$, до яких згідно з теоремами 1 і 2 гарантовано двосторонню збіжність ітераційних процесів (11)-(13) і (27)-(31) відповідно.

Таблиця 1

Порогові значення λ'_{\max} і λ''_{\max} для ітераційних схем(11)-(13) і (27)-(31)

α		$\kappa = 0$	$\kappa = 0,5$	$\kappa = 1$	$\kappa = 1,5$	$\kappa = 2$	$\kappa = 2,5$	$\kappa = 3$
0	λ'_{\max}	0,7111	0,7834	1,0006	1,3634	1,8726	2,5292	3,3340
	λ''_{\max}	0,7111	0,7694	0,9337	1,1784	1,4753	1,8019	2,1439
1	λ'_{\max}	1,9753	2,1780	2,7886	3,8136	5,2622	7,1437	9,4664
	λ''_{\max}	1,4222	1,5082	1,7359	2,0439	2,3826	2,7273	3,0703
2	λ'_{\max}	3,8095	4,2025	5,3880	7,3840	10,2155	13,9082	18,4849
	λ''_{\max}	2,1333	2,2354	2,4970	2,8339	3,1885	3,5391	3,8822
3	λ'_{\max}	6,2222	6,8661	8,8105	12,0903	16,7535	22,8502	30,4242
	λ''_{\max}	2,8444	2,9572	3,2399	3,5936	3,9570	4,3110	4,6551

Як бачимо, порогові значення λ'_{\max} і λ''_{\max} зростають як при збільшенні κ , так і при збільшенні α . Це відповідає збільшенню зі зростанням κ чи α критичної напруги, тобто значення, за якого розв'язок задачі (3), (4) перестає існувати і мікробалка прилипає до електрода. При цьому завжди $\lambda'_{\max} > \lambda''_{\max}$ і для великих значень κ і α ця різниця стає суттєвою.

За допомогою кожної з ітераційних схем (11)-(13) і (27)-(31) з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$ була розв'язана задача (3), (4) для значень $\kappa = 1$, $\alpha = 1$ і $\lambda = 1, 5$.

Ітераційний процес (11)-(13) зійшовся з точністю ε за чотири ітерації, причому $\|u^{(4)}\| = u^{(4)}(0) = 0,090349$. На рисунку 2 наведено графіки верхніх $w^{(k)}(x)$ та нижніх $v^{(k)}(x)$ наближень, $k = 0, 1, 2, 3, 4$, а на рисунку 3 наведено графік наближеного розв'язку $u^{(4)}(x)$.

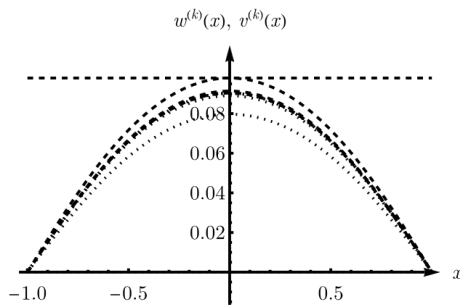


Рис. 2. Графіки верхніх $w^{(k)}(x)$ (штрихова лінія) та нижніх $v^{(k)}(x)$ (точкова лінія) наближень для $k = 0, 1, 2, 3, 4$

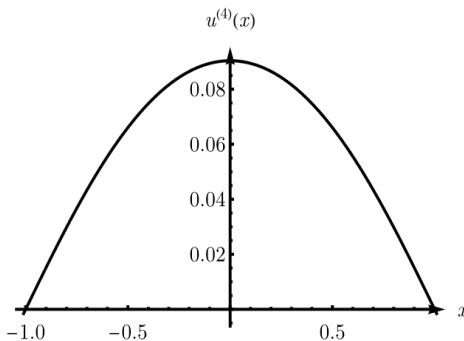


Рис. 3. Графік наближеного розв'язку $u^{(4)}(x)$

У таблиці 2 наведено дані про те, як змінювалася оцінка похибки $\varepsilon^{(k)} = \frac{1}{2} \max_{x \in [-1; 1]} [w^{(k)}(x) - v^{(k)}(x)]$ в залежності від номера ітерації k .

Таблиця 2

*Значення оцінки похибки $\varepsilon^{(k)}$
 в залежності від номера ітерації k
 для ітераційної схеми (11)-(13)*

k	0	1	2	3	4
$\varepsilon^{(k)}$	$0,49 \cdot 10^{-1}$	$0,91 \cdot 10^{-2}$	$0,12 \cdot 10^{-2}$	$0,16 \cdot 10^{-3}$	$0,20 \cdot 10^{-4}$

Аналіз таблиці 2 показують, що один знак після коми у наближеному розв'язку встановлюється приблизно за одну-дві ітерації і що швидкість збіжності є геометричною з показником $\approx 0,130$.

В таблиці 3 наведено значення наближеного розв'язку $u^{(4)}(x)$ на відрізку $[-1; 1]$ на сітці з кроком 0,25.

Таблиця 3

*Значення наближеного розв'язку $u^{(4)}(x)$ в точках
 $x_i = -1 + 0,25i, i = 0, 1, \dots, 8$*

x_i	-1	-0,75	-0,5	-0,25	0
$u^{(4)}(x_i)$	0	0,036745	0,066058	0,084269	0,090349
x_i	0,25	0,5	0,75	1	
$u^{(4)}(x_i)$	0,084269	0,066058	0,036745	0	

Ітераційний процес (27)-(31) зійшовся з точністю ε за вісім ітерацій, причому

$$\|u_1^{(8)}\| = \|u^{(8)}\| = u^{(8)}(0) = 0,090381, \quad u_2^{(8)}(0) = 0,194069.$$

На рисунку 4 наведено графіки верхніх $w_1^{(k)}(x)$ та нижніх $v_1^{(k)}(x)$ наближень до $u_1(x) = u(x)$, на рисунку 5 наведено графіки верхніх $w_2^{(k)}(x)$ та нижніх $v_2^{(k)}(x)$ наближень до $u_2(x) = -u''(x)$, $k = 0, 1, 2, \dots, 8$, а на рисунках 6 і 7 відповідно наведено графіки наближених розв'язків $u_1^{(8)}(x)$ і $u_2^{(8)}(x)$.

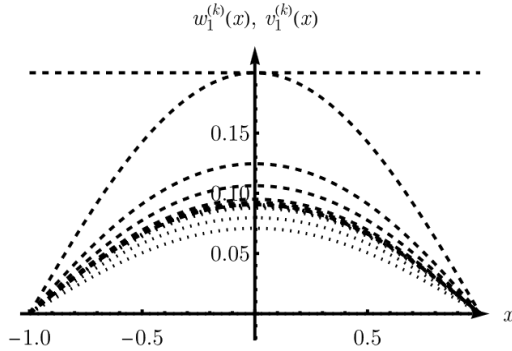


Рис. 4. Графіки верхніх $w_1^{(k)}(x)$ (штрихова лінія) та нижніх $v_1^{(k)}(x)$ (точкова лінія) наближень для $k = 0, 1, 2, \dots, 8$

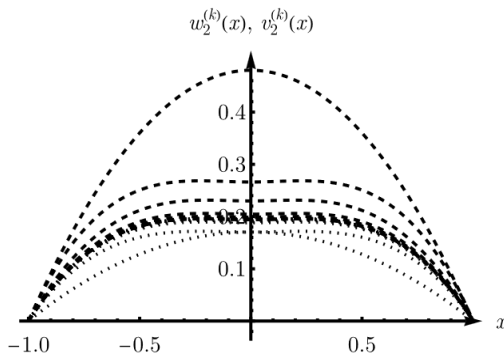


Рис. 5. Графіки верхніх $w_2^{(k)}(x)$ (штрихова лінія) та нижніх $v_2^{(k)}(x)$ (точкова лінія) наближень для $k = 0, 1, 2, \dots, 8$

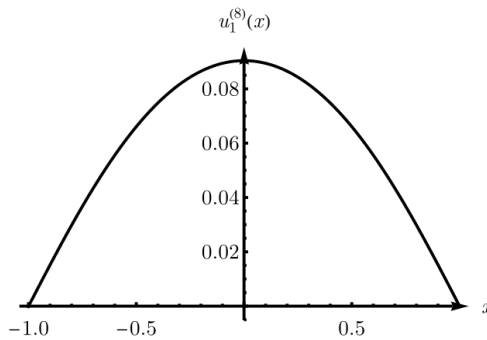


Рис. 6. Графік наближеного розв'язку $u_1^{(8)}(x)$

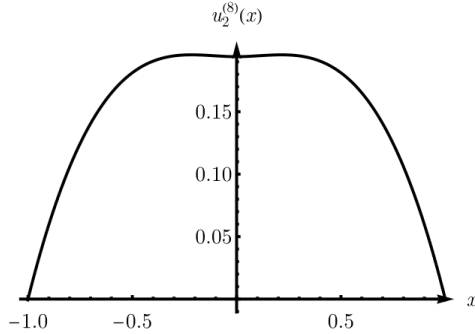


Рис. 7. Графік наближеного розв'язку $u_2^{(8)}(x)$

У таблиці 4 наведено дані про те, як змінювалася оцінка похибки $\varepsilon^{(k)} = \frac{1}{2} \max \left\{ \max_{x \in [-1; 1]} [w_1^{(k)}(x) - v_1^{(k)}(x)], \max_{x \in [-1; 1]} [w_2^{(k)}(x) - v_2^{(k)}(x)] \right\}$ в залежності від номера ітерації k .

Таблиця 4

Значення оцінки похибки $\varepsilon^{(k)}$ в залежності від номера ітерації k для ітераційної схеми (27)-(31)

k	0	1	2	3	4
$\varepsilon^{(k)}$	$0,15 \cdot 10^0$	$0,65 \cdot 10^{-1}$	$0,22 \cdot 10^{-1}$	$0,93 \cdot 10^{-2}$	$0,30 \cdot 10^{-2}$
k	5	6	7	8	
$\varepsilon^{(k)}$	$0,12 \cdot 10^{-2}$	$0,40 \cdot 10^{-3}$	$0,16 \cdot 10^{-3}$	$0,51 \cdot 10^{-4}$	

Аналіз таблиці 4 показую, що один знак після коми у наближеному розв'язку встановлюється приблизно за дві ітерації і що швидкість збіжності є геометричною з показником $\approx 0,375$.

В таблиці 5 наведено значення наближеного розв'язку $u_1^{(8)}(x)$ на відріжку $[-1; 1]$ на сітці з кроком 0,25, а в таблиці 6 – значення наближеного розв'язку $u_2^{(8)}(x)$ на тій же сітці.

Таблиця 5

Значення наближеного розв'язку $u_1^{(8)}(x)$ в точках $x_i = -1 + 0,25i$, $i = 0, 1, \dots, 8$

x_i	-1	-0,75	-0,5	-0,25	0
$u_1^{(8)}(x_i)$	0	0,036757	0,066080	0,084298	0,090381
x_i	0,25	0,5	0,75	1	
$u_1^{(8)}(x_i)$	0,084298	0,066080	0,036757	0	

Таблиця 6

Значення наближеного розв'язку оцінки похибки $u_2^{(8)}(x)$
 в точках $x_i = -1 + 0,25i$, $i = 0, 1, \dots, 8$

x_i	-1	-0,75	-0,5	-0,25	0
$u_2^{(8)}(x_i)$	0	0,124596	0,181186	0,195448	0,194069
x_i	0,25	0,5	0,75	1	
$u_2^{(8)}(x_i)$	0,195448	0,181186	0,124596	0	

Порівнюючи запропоновані ітераційні процеси можна зробити наступні висновки. Перш за все, обидва процеси дозволяють отримати наближений розв'язок задачі (3), (4) із заданою точністю (результати, наведені в таблицях 3 і 5, співпадають з точністю ε). Ітераційний процес (27)-(31) збігається повільніше та для меншої множини значень параметра λ , ніж процес (11)-(13), але дозволяє з гарантованою точністю наблизити не тільки розв'язок крайової задачі (3), (4), а й його другу похідну, яка характеризує внутрішню відновлювальну силу пружності. Крім того, саме ітераційний процес (27)-(31) може бути узагальнений на двовимірні задачі, оскільки функція Гріна задачі Діріхле для операторів $-\Delta u$ і $-\Delta u + \kappa^2 u$ відома для більшої кількості областей, ніж функція Гріна задачі Нав'є для оператора $\Delta^2 u - \kappa^2 \Delta u$.

За допомогою ітераційного процесу (11)-(13) було проведено низку обчислювальних експериментів (з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$) для різних значень параметрів κ , α і λ . У таблицях 7, 8 наведено норми відповідних наближених розв'язків $u^{(k)}$ та кількість виконаних ітерацій k .

Таблиця 7

Значення норм наближеного розв'язку задачі (3), (4) для $\kappa = 1$

	$\alpha = 1$				
λ	1	2	3	4	5
k	3	5	–	–	–
$\ u^{(k)}\ $	0,057468	0,127212	–	–	–
	$\alpha = 2$				
λ	1	2	3	4	5
k	2	3	4	4	6
$\ u^{(k)}\ $	0,028420	0,058960	0,092127	0,128691	0,169821

Таблиця 8

Значення норм наближеного розв'язку задачі (3), (4) для $\kappa = 2$

$\alpha = 1$					
λ	1	2	3	4	5
k	2	3	4	5	7
$\ u^{(k)}\ $	0,029306	0,061359	0,096982	0,137555	0,185648
$\alpha = 2$					
λ	1	2	3	4	5
k	2	2	3	3	3
$\ u^{(k)}\ $	0,014762	0,030079	0,046023	0,062658	0,080082
λ	6	7	8	9	10
k	4	4	5	5	6
$\ u^{(k)}\ $	0,098408	0,117781	0,138378	0,160476	0,184388

Як бачимо, для фіксованих κ і α зі зростанням λ зростає і $\|u\|$, тобто мікробалка сильніше прогинається зі збільшенням напру- ги. Якщо ж α і λ фіксовані, то зі зростанням κ величина $\|u\|$ змен- шується, що є наслідком того, що система стає жорсткішою і сильні- ше протидіє деформації. Також $\|u\|$ зменшується зі зростанням α за фіксованих значень κ і λ : зі збільшенням α навантаження сильні- шає на краях, а отже, у середньому мікробалка прогинається менше.

Також зауважимо, що послідовності нижніх та верхніх набли- жень, сформованих за запропонованими ітераційними схемами (11)- (13) і (27)-(31), утворюють незалежні послідовності, а тому при орга- нізації відповідних обчислювальних процесів їх знаходити, викорис- товуючи розпаралелювання обчислень.

Висновки. У роботі отримали подальший розвиток ітераційні методи двобічних наближень чисельного аналізу крайової задачі Нав'є, яка є математичною моделлю процесу прогину мікробалки МЕМС під дією електростатичних сил. Запропоновано два підходи до формування ітераційних процесів. Ці ітераційні процеси забезпечу- ють формування послідовностей верхніх та нижніх наближень до шуканого розв'язку, а отже, дають можливість на кожному своєму кроці мати гарантовану оцінку похибки наближення. Для обох мето- дів отримано умови збіжності до єдиного (на деякому конусному від- різку) додатного розв'язку вихідної крайової задачі.

За результатами обчислювальних експериментів проведено по- рівняльний аналіз запропонованих ітераційних методів і досліджено

залежність розв'язку задачі від параметрів. Методи показали свою ефективність при розв'язуванні тестових задач і дозволили адекватно промоделювати відповідний фізичний процес.

Отримані у роботі результати можуть бути використані при проєктуванні різних типів МЕМС: мікроактуаторів, перемикачів, сенсорів тиску тощо. Також результати роботи можна розповсюдити на дво- та тривимірні стаціонарні задачі (використовуючи метод функцій Гріна чи метод квазіфункцій Гріна-Рвачова), а також (у комбінації з методом прямих Роте) результати роботи можна розповсюдити на нестаціонарний випадок.

Цим визначається наукова новизна та практична значущість отриманих результатів.

Список використаних джерел:

1. Кончаковська О. С., Сидоров М. В. Двобічний ітераційний метод на основі використання функції Гріна в задачах чисельного аналізу деяких електро-механічних систем. *Вісник ХНУ ім. В. Н. Каразіна. Сер. Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління*. 2022. № 55. С. 19-31. DOI: 10.26565/2304-6201-2022-55-02.
2. Кончаковська О. С., Сидоров М. В. Метод двобічних наближень у чисельному аналізі однієї мікроелектромеханічної системи. *Вісник ХНУ ім. В. Н. Каразіна. Сер. Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління*. 2018. Вип. 39. С. 33-41.
3. Кончаковська О. С., Сидоров М. В. Метод квазіфункцій Гріна-Рвачова у чисельному аналізі мікроелектромеханічних систем методом двосторонніх наближень. *Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях*. 2023. № 1. С. 135-141. DOI: 10.20998/2222-0631.2023.01.20.
4. Опойцев В. И., Хуродзе Т. А. Нелинейные операторы в пространствах с конусом. Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1984. 246 с.
5. Савченко А. В., Гвоздев М. І. Застосування методу двобічних наближень до аналізу статичного прогину пружної балки з різними типами закріплення кінців в моделі мікроелектромеханічної системи. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки*. 2025. Вип. 28. С. 93-106. DOI: 10.32626/2308-5878.2025-28.93-106.
6. Сидоров М. В. Побудова двобічних наближень до додатного розв'язку нелінійної задачі Нав'є. *Вісник ХНУ ім. В. Н. Каразіна. Сер. Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління*. 2017. Вип. 34. С. 58-66.
7. Derakhshani M., Berfield T. A. Snap-Through and Mechanical Strain Analysis of a MEMS Bistable Vibration Energy Harvester. *Shock and Vibration*. 2019. Article 6743676. DOI: 10.1155/2019/6743676.
8. Guan C., Zhu Y. An electrothermal microactuator with Z-shaped beams. *Journal of Micromechanics and Microengineering*. 2010. Vol. 20, № 8. Article 085014. DOI: 10.1088/0960-1317/20/8/085014.

9. Konchakovska O., Sidorov M. Numerical Analysis of the One-Dimensional Nonlinear Boundary Value Problem that Modeling an Electrostatic NEMS by Two-Sided Approximations Method. *Journal of Numerical Analysis, Industrial and Applied Mathematics (JNAIAM)*. 2020. Vol. 14, № 3-4. P. 17-26.
10. Konchakovska O., Sidorov M. Using the two-sided approximations method for the numerical research of nanoelectromechanical systems under the action of the Casimir force. *Вісник ХНУ ім. В. Г. Каразіна. Сер. Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління*. 2022. Вип. 56. С. 21-34. DOI: 10.26565/2304-6201-2022-56-02.
11. Koochi A., Abadyan M. Nonlinear differential equations in micro/nano mechanics: Application in micro/nanostructures and electromechanical systems. Amsterdam: Elsevier, 2020. 270 p.
12. Krasnoselskii M. A. Positive solutions of operator equations. Groningen: P. Noordhoff, 1964. 379 p.
13. Lakshmi S., Dinesh P. A., Pratheeksha C. S. Electromechanical modelling of electrostatically actuated beams. *Microsystem Technologies*. 2019. № 25. P. 2805-2812. DOI: 10.1007/s00542-018-4170-1.
14. Material selection and performance analysis of RF-MEMS switch for MM-WAVE applications / R. Karthick, S. P. K. Babu, B. Balaji. *International Journal of Computational and Experimental Science and Engineering*. 2025. Vol. 1, № 11. P. 440-448. DOI: 10.22399/ijcesen.737.
15. Najar F., Ghommem M., Abdel-Rahman E. Arch microbeam bifurcation gas sensors. *Nonlinear Dynamics*. 2021. Vol. 104. P. 923-940. DOI: 10.1007/s11071-021-06319-0.
16. On Design and Analysis of Electrostatic Arch Micro-Tweezers / A. M. Alneamy, G. R. Heppler, E. M. Abdel-Rahman, M. E. Khater. *Journal of Vibration and Acoustics*. 2021. Vol. 143, № 3. Article 031001. DOI: 10.1115/1.4048298.
17. Pelesko J. A., Bernstein D. H. Modeling MEMS and NEMS. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2003. 364 p.
18. Research Status and Development Trend of MEMS Switches: A Review / T. Cao, T. Hu, Y. Zhao. *Micromachines*. 2020. Vol. 11, № 7. Article 694. DOI: 10.3390/mi11070694.
19. Rezazadeh G. A comprehensive model to study nonlinear behavior of multi-layered micro beam switches. *Microsystem Technologies*. 2008. Vol. 14. P. 135-141. DOI: 10.1007/s00542-007-0398-x.
20. Sadeghian H., Rezazadeh G., Abbaspour Sani E. Some Design Considerations on the Electrostatically Actuated Fixed-Fixed End Type MEMS Switches. *Journal of Physics: Conference Series*. 2006. Vol. 34. International MEMS Conference 2006 9-12 May 2006, Singapore. P. 174-179. DOI: 10.1088/1742-6596/34/1/029.
21. Younis M., Abdel-Rahman E., Nayfeh A. A reduced-order model for electrically actuated microbeam-based MEMS. *Journal of Microelectromechanical Systems*. 2003. Vol. 12, № 5. P. 672-680. DOI: 10.1109/JMEMS.2003.818069.

References:

1. Konchakovska O. S., Sidorov M. V. Dvobichnyi iteratsiyniy metod na osnovi vykorystannia funktsii Hrına v zadachakh chyselnoho analizu deiakykh elektro-

- mekhanichnykh system. *Visnyk KhNU im. V. N. Karazina. Ser. Matematychni modeliuvannia. Informatsiini tekhnologii. Avtomatyzovani systemy upravlinnia*. 2022. No. 55. P. 19-31. DOI: 10.26565/2304-6201-2022-55-02.
2. Konchakovska O. S., Sidorov M. V. Metod dvobichnykh nablyzhen u chyselnomu analizi odnii mikroelektromekhanichnoi systemy. *Visnyk KhNU im. V. N. Karazina. Ser. Matematychni modeliuvannia. Informatsiini tekhnologii. Avtomatyzovani systemy upravlinnia*. 2018. Iss. 39. P. 33-41.
 3. Konchakovska O. S., Sydorov M. V. Metod kvazifunktsii Hrina-Rvachova u chyselnomu analizi mikroelektromekhanichnykh system metodom dvostoronnikh nablyzhen. *Visnyk Natsionalnoho tekhnichnoho universytetu «KhPI». Seria: Matematychni modeliuvannia v tekhnitsi ta tekhnologiiakh*. 2023. № 1. P. 135-141. DOI: 10.20998/2222-0631.2023.01.20.
 4. Opoitsev V. I., Khurodze T. A. Nelineinye operatory v prostranstvakh s konusom. Tbilisi: Izd-vo Tbilisskogo un-ta, 1984. 246 p.
 5. Savchenko A. V., Hvozdiiev M. I. Zastosuvannia metodu dvobichnykh nablyzhen do analizu statychnoho prohynu pruzhnoi balky z ryznymi typamy zakriplennia kintsiv v modeli mikroelektromekhanichnoi systemy. *Matematychni ta kompiuterne modeliuvannia. Seria: Fyzyko-matematychni nauky*. 2025. Iss. 28. P. 93-106. DOI: 10.32626/2308-5878.2025-28.93-106.
 6. Sidorov M. V. Pobudova dvobichnykh nablyzhen do dodatnoho rozviazku neliniinoi zadachi Navie. *Visnyk KhNU im. V. N. Karazina. Ser. Matematychni modeliuvannia. Informatsiini tekhnologii. Avtomatyzovani systemy upravlinnia*. 2017. Iss. 34. P. 58-66.
 7. Derakhshani M., Berfield T. A. Snap-Through and Mechanical Strain Analysis of a MEMS Bistable Vibration Energy Harvester. *Shock and Vibration*. 2019. Article 6743676. DOI: 10.1155/2019/6743676.
 8. Guan C., Zhu Y. An electrothermal microactuator with Z-shaped beams. *Journal of Micromechanics and Microengineering*. 2010. Vol. 20, № 8. Article 085014. DOI: 10.1088/0960-1317/20/8/085014.
 9. Konchakovska O., Sidorov M. Numerical Analysis of the One-Dimensional Nonlinear Boundary Value Problem that Modeling an Electrostatic NEMS by Two-Sided Approximations Method. *Journal of Numerical Analysis, Industrial and Applied Mathematics (JNAIAM)*. 2020. Vol. 14, № 3-4. P. 17-26.
 10. Konchakovska O., Sidorov M. Using the two-sided approximations method for the numerical research of nanoelectromechanical systems under the action of the Casimir force. *Visnyk KhNU im. V. N. Karazina. Ser. Matematychni modeliuvannia. Informatsiini tekhnologii. Avtomatyzovani systemy upravlinnia*. 2022. Iss. 56. P. 21-34. DOI: 10.26565/2304-6201-2022-56-02.
 11. Koochi A., Abadyan M. Nonlinear differential equations in micro/nano mechanics: Application in micro/nanostructures and electromechanical systems. Amsterdam: Elsevier, 2020. 270 p.
 12. Krasnoselskii M. A. Positive solutions of operator equations. Groningen: P. Noordhoff, 1964. 379 p.
 13. Lakshmi S., Dinesh P. A., Pratheeksha C. S. Electromechanical modelling of electrostatically actuated beams. *Microsystem Technologies*. 2019. № 25. P. 2805-2812. DOI: 10.1007/s00542-018-4170-1.

14. Material selection and performance analysis of RF-MEMS switch for MM-WAVE applications / R. Karthick, S. P. K. Babu, B. Balaji. *International Journal of Computational and Experimental Science and Engineering*. 2025. Vol. 1, № 11. P. 440-448. DOI: <https://doi.org/10.22399/ijcesen.737>.
15. Najar F., Ghommem M., Abdel-Rahman E. Arch microbeam bifurcation gas sensors. *Nonlinear Dynamics*. 2021. Vol. 104. P. 923-940. DOI: 10.1007/s11071-021-06319-0.
16. On Design and Analysis of Electrostatic Arch Micro-Tweezers / A. M. Alneamy, G. R. Heppler, E. M. Abdel-Rahman, M. E. Khater. *Journal of Vibration and Acoustics*. 2021. Vol. 143, № 3. Article 031001. DOI: 10.1115/1.4048298.
17. Pelesko J. A., Bernstein D. H. Modeling MEMS and NEMS. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2003. 364 p.
18. Research Status and Development Trend of MEMS Switches: A Review / T. Cao, T. Hu, Y. Zhao. *Micromachines*. 2020. Vol. 11, № 7. Article 694. DOI: 10.3390/mi11070694.
19. Rezazadeh G. A comprehensive model to study nonlinear behavior of multi-layered micro beam switches. *Microsystem Technologies*. 2008. Vol. 14. P. 135-141. DOI: 10.1007/s00542-007-0398-x.
20. Sadeghian H., Rezazadeh G., Abbaspour Sani E. Some Design Considerations on the Electrostatically Actuated Fixed-Fixed End Type MEMS Switches. *Journal of Physics: Conference Series*. 2006. Vol. 34. International MEMS Conference 2006 9-12 May 2006, Singapore. P. 174-179. DOI: 10.1088/1742-6596/34/1/029.
21. Younis M., Abdel-Rahman E., Nayfeh A. A reduced-order model for electrically actuated microbeam-based MEMS. *Journal of Microelectromechanical Systems*. 2003. Vol. 12, № 5. P. 672-680. DOI: 10.1109/JMEMS.2003.818069.

THE METHOD OF TWO-SIDED APPROXIMATIONS IN THE NUMERICAL ANALYSIS OF THE NAVIER PROBLEM AS A MATHEMATICAL MODEL OF A ONE-DIMENSIONAL MICROELECTROMECHANICAL SYSTEM

This paper considers a boundary value problem for a fourth-order semilinear ordinary differential equation (the Navier problem), which describes the static deflection of a microbeam in microelectromechanical systems under the action of electrostatic forces. The study of this problem is based on its reduction to an equivalent Hammerstein integral equation or to a system of Hammerstein integral equations, which are analyzed using methods of nonlinear operator theory in semi-ordered Banach spaces.

By the first approach, the original boundary value problem is reduced to a Hammerstein integral equation via the construction of the Green's function for a fourth-order ordinary differential operator with Navier boundary conditions. In the second approach, the problem is first transformed into a first boundary value problem for a system of semilinear ordinary differential equations, followed by its reduction to a system of Hammerstein equations. In this case, Green's functions of second-order ordinary differential operators with first boundary conditions are em-

ployed. The properties of the nonlinear operators corresponding to the obtained equation and system of equations are investigated. In particular, it is established that each of these operators is positive, isotone, Lipschitz continuous, continuous, and completely continuous.

Two schemes of the method of two-sided approximations are proposed. The choice of this method is justified by the fact that it allows not only the construction of approximate solutions but also the theoretical establishment of conditions for their existence and uniqueness. Another advantage of the method is the availability of a convenient a posteriori error estimate.

Conditions for the convergence of each of the proposed schemes to the unique solution of the original boundary value problem on an invariant conical segment are obtained. To analyze the efficiency of the algorithms, a series of computational experiments is carried out for different values of the problem parameters. A comparative analysis of the results is performed, and practical recommendations are provided.

Key words: *boundary value problem, deflection, fourth-order semilinear ordinary differential equation, Green's function, Hammerstein equation, invariant cone segment, isotone operator, mathematical modeling, method of two-sided approximations, microbeam, microelectromechanical system (MEMS), Navier problem, numerical methods, simply supported boundary conditions.*