ISSN 2308-5878. Mathematical and computer modelling.
Series: Physical and mathematical sciences. 2026. Issue 30. P. 31-47.

УДК 517.958;517.956.4
DOI: 10.32626/2308-5878.2026-30.31-47

Громик А. П.

ORCID: 0000-0003-3071-9756,
канд. техн. наук, Заклад вищої освіти «Подільський державний університет», м. Кам'янець-Подільський, Україна,
E-mail: gapon74@gmail.com

Конет І. М.

ORCID: 0000-0002-4241-0548,
д-р фіз.-мат. наук, професор, Волинський національний університет імені Лесі Українки, м. Луцьк, Україна,
E-mail: konet51@ukr.net

Пилипюк Т. М.

ORCID: 0000-0002-4676-9830,
канд. фіз.-мат. наук, Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський, Україна,
E-mail: pylypyuk.tetiana@kpnu.edu.ua

ГІПЕРБОЛІЧНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ В КУСКОВО-ОДНОРІДНОМУ КЛИНОВИДНОМУ ЦИЛІНДРИЧНО-КРУГОВОМУ ШАРІ З ПОРОЖНИНОЮ

У пропонованій статті методом класичних інтегральних і гібридних інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розв'язків (матриць впливу та матриць Гріна) вперше побудовано єдині точні аналітичні розв'язки гіперболічних крайових задач математичної фізики в кусково-однорідному за радіальною змінною r клиновидному за кутовою змінною φ циліндрично-круговому шарі з порожниною.

Розглянуто випадки задання на гранях клина крайових умов 1-го роду (Діріхле), 2-го роду (Неймана) та їх можливих комбінацій (Діріхле-Неймана, Неймана-Діріхле).

Для побудови розв'язків досліджуваних початково-крайових задач застосовано скінченне інтегральне перетворення Фур'є щодо кутової змінної φ, скінченне інтегральне перетворення Фур'є на декартовому сегменті щодо аплікатної змінної z та гібридне інтегральне перетворення типу Вебера на полярній осі $(R_0; +\infty)$ з n точками спряження щодо радіальної змінної.

Стаття надійшла до редакції: 18.05.2026
Рекомендовано до друку: 20.05.2026
Оприлюднено (online): 29.05.2026

Ця стаття розповсюджується на умовах ліцензії CC Attribution-NonCommercial-NoDerivatives 4.0

© Громик А. П., Конет І. М., Пилипюк Т. М., 2026

Послідовне застосування інтегральних перетворень за геометричними змінними дозволяє звести тривимірні початково-крайові задачі спряження до задачі Коші для звичайного лінійного неоднорідного диференціального рівняння 2-го порядку, єдиний розв'язок якої виписано в замкнутому вигляді.

Застосування обернених інтегральних перетворень до одержаного розв'язку в просторі зображень відновлює в явному вигляді у просторі оригіналів розв'язки розглянутих гіперболічних крайових задач математичної фізики через їх інтегральне зображення.

При цьому головні розв'язки задач одержано в явному вигляді.

Ключові слова: *гіперболічне рівняння, початкові та крайові умови, умови спряження, інтегральні перетворення, гібридні інтегральні перетворення, головні розв'язки.*

Вступ. Теорія крайових і мішаних (початково-крайових) задач для різних типів диференціальних рівнянь з частинними похідними, зокрема рівнянь математичної фізики, – важливий розділ сучасної теорії диференціальних рівнянь, який в цей час інтенсивно розвивається. Її актуальність обумовлена як значимістю її результатів для розвитку багатьох розділів математики, так і численними застосуваннями її досягнень при дослідженні різноманітних математичних моделей різних процесів і явищ фізики, хімії, біології, медицини, економіки, механіки, техніки, новітніх технологій.

Вагомі результати з теорії задачі Коші та початково-крайових задач для гіперболічних рівнянь і їх систем одержано в [1-8] та в працях інших вітчизняних і зарубіжних математиків.

Добре відомо, що складність досліджуваних крайових задач суттєво залежить як від властивостей коефіцієнтів рівнянь (різні види вироджeностей і особливостей), так і від геометричної структури області (гладкість межі, наявність кутових точок, обмеженість, необмеженість тощо), в якій розглядається задача. На цей час досить детально вивчено властивості розв'язків і розвинуто різноманітні методи побудови розв'язків (точні та наближені) крайових задач для лінійних, квазілінійних і деяких нелінійних рівнянь різних типів (еліптичних, параболічних, гіперболічних) в однозв'язних областях (однорідних середовищах), які обумовлені згаданими вище властивостями коефіцієнтів рівнянь і геометрією області, та побудовано функціональні простори коректності задач в сенсі Адамара.

Водночас багато важливих прикладних задач термомеханіки, теплофізики, дифузії, теорії пружності, теорії електричних кіл, теорії коливань, механіки деформівного твердого тіла приводять до крайових і мішаних задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними різних типів не тільки в однорідних середовищах, коли коефіцієнти рівнянь є неперервними функціями, але й в неоднорідних і кусково-однорідних середовищах, коли коефіцієнти рівнянь є кусково-неперервними функціями чи, зокрема, кусково-сталими [9-11].

Відомо, що крім *методу відокремлення змінних* (методу Фур'є) та його узагальнень, одним із важливих і ефективних методів вивчення лінійних крайових і мішаних задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними в однорідних середовищах є *метод інтегральних перетворень*, який дає можливість побудувати в аналітичному вигляді точні розв'язки розглянутих задач через їх інтегральне зображення.

У той же час для досить широкого класу лінійних крайових задач у кусково-однорідних середовищах ефективним методом побудови їх розв'язків виявився *метод гібридних інтегральних перетворень*, що породжені відповідними гібридними диференціальними операторами, коли на кожній компоненті зв'язності кусково-однорідного середовища розглядаються або ж різні диференціальні оператори, або ж диференціальні оператори того ж самого вигляду, але з різними наборами коефіцієнтів [12-14].

У цій статті методом класичних інтегральних і гібридних інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розв'язків вперше побудовано інтегральні зображення єдиних точних аналітичних розв'язків гіперболічних початково-крайових задач математичної фізики в кусково-однорідному клиновидному циліндрично-круговому шарі порожниною.

Постановка задачі. Розглянемо задачу побудови обмеженого на множині $D = \{(t, r, \varphi, z): \ t > 0; \ r \in I_n^+ = \bigcup_{j=1}^{n+1} I_j = \bigcup_{j=1}^{n+1} (R_{j-1}; R_j), \ R_0 > 0,$

$$R_{n+1} = +\infty; \ \varphi \in (0; \varphi_0), \ 0 < \varphi_0 < 2\pi; \ z \in (-l_1; l_2), \ l_j \ge 0; \ l_1 + l_2 \ne 0\}$$

класичного розв'язку лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними гіперболічного типу 2-го порядку [15]

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} - \left[a_{rj}^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{a_{\varphi j}^2}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + a_{zj}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] u_j + \chi_j^2 u_j = f_j(t, r, \varphi, z); \quad r \in I_j; \ j = \overline{1, n+1} \tag{1}$$

з початковими умовами

$$u_j\big|_{t=0} = g_j^1(r, \varphi, z); \ \frac{\partial u_j}{\partial t}\Big|_{t=0} = g_j^2(r, \varphi, z); \ r \in I_j; \ j = \overline{1, n+1}, \tag{2}$$

крайовими умовами

$$\left(-\frac{\partial}{\partial z}+h_1\right)u_j\bigg|_{z=-l_1}=w_j^1(t,r,\varphi);\quad \left(\frac{\partial}{\partial z}+h_2\right)u_j\bigg|_{z=l_2}=w_j^2(t,r,\varphi); \tag{3}$$

$$h_p\ge 0;\ h_1+h_2\ne 0;\ p=1,2;\ j=\overline{1,n+1},$$

$$\left(\alpha_{11}^0\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{11}^0\right)u_1\bigg|_{r=R_0}=g_0(t,\varphi,z);\quad \frac{\partial^s u_{n+1}}{\partial r^s}\bigg|_{r=+\infty}=0, \tag{4}$$

$$\alpha_{11}^0\le 0,\ \beta_{11}^0\ge 0;\ \left|\alpha_{11}^0\right|+\beta_{11}^0\ne 0;\ s=0,1,$$

одними з крайових умов на гранях клина [12]

$$u_j\big|_{\varphi=0}=g_{1j}(t,r,z);\quad u_j\big|_{\varphi=\varphi_0}=w_{1j}(t,r,z);\ \ j=\overline{1,n+1}, \tag{5}$$

$$u_j\big|_{\varphi=0}=g_{2j}(t,r,z);\quad \frac{\partial u_j}{\partial\varphi}\bigg|_{\varphi=\varphi_0}=-w_{2j}(t,r,z);\ \ j=\overline{1,n+1}, \tag{6}$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial\varphi}\bigg|_{\varphi=0}=g_{3j}(t,r,z);\quad u_j\big|_{\varphi=\varphi_0}=w_{3j}(t,r,z);\ \ j=\overline{1,n+1}, \tag{7}$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial\varphi}\bigg|_{\varphi=0}=g_{4j}(t,r,z);\quad \frac{\partial u_j}{\partial\varphi}\bigg|_{\varphi=\varphi_0}=-w_{4j}(t,r,z);\ \ j=\overline{1,n+1} \tag{8}$$

та умовами спряження [6]

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{j1}^k\right)u_k-\left(\alpha_{j2}^k\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{j2}^k\right)u_{k+1}\right]\bigg|_{r=R_k}=0;\ j=1,2;\ k=\overline{1,n}, \tag{9}$$

де

$$a_{rj},\ a_{\varphi j},\ a_{zj},\ \chi_j,\ h_p,\ \alpha_{js}^k,\ \beta_{js}^k\ \text{– деякі сталі;}$$

$$c_{jk}\equiv\alpha_{2j}^k\beta_{1j}^k-\alpha_{1j}^k\beta_{2j}^k\ne 0;\ \ c_{1k}\cdot c_{2k}>0;$$

$$f(t,r,\varphi,z)=\{f_1(t,r,\varphi,z),f_2(t,r,\varphi,z),\ldots,f_{n+1}(t,r,\varphi,z)\};$$

$$g^1(r,\varphi,z)=\left\{g_1^1(r,\varphi,z),g_2^1(r,\varphi,z),\ldots,g_{n+1}^1(r,\varphi,z)\right\};$$

$$g^2(r,\varphi,z)=\left\{g_1^2(r,\varphi,z),g_2^2(r,\varphi,z),\ldots,g_{n+1}^2(r,\varphi,z)\right\}$$

$$w_j^s(t,r,\varphi),\ g_0(t,\varphi,z),g_{pj}(t,r,z),\ w_{pj}(t,r,z);\ (s=1,2;\ p=\overline{1,4};\ j=\overline{1,n+1})$$

– задані дійсні обмежені неперервні функції;

$$u(t,r,\varphi,z)=\{u_1(t,r,\varphi,z),\ u_2(t,r,\varphi,z),\ \ldots,\ u_{n+1}(t,r,\varphi,z)\}$$

– шукана дійсна двічі неперервно диференційовна функція.

Зауважимо, що:

1) у випадку $\chi_j\equiv 0$ ($j=\overline{1,n+1}$) рівняння (1) є класичним тривимірним неоднорідним рівнянням коливань (хвильовим рівнянням, рі-

вннянням Д'аламбера) для ортотропного середовища у циліндричній системі координат;

2) якщо $\alpha_{11}^k = 0$, $\beta_{11}^k = 1$; $\alpha_{12}^k = 0$, $\beta_{12}^k = 1$; $\alpha_{21}^k = E_1^k$, $\beta_{21}^k = 0$; $\alpha_{22}^k = E_2^k$, $\beta_{22}^k = 0$, де E_1^k, E_2^k – модулі Юнга ($k = \overline{1,n}$), то умови спряження (9) збігаються з класичними умовами ідеального механічного контакту.

Таким чином, гіперболічні початково-крайові задачі спряження (1)-(4), (5), (9); (1)-(4), (6), (9); (1)-(4), (7), (9); (1)-(4), (8), (9) можна розглядати як узагальнені математичні моделі коливних процесів у кусково-однорідному клиновидному циліндрично-круговому шарі з порожниною.

Основна частина. Припустимо, що розв'язки гіперболічних початково-крайових задач (1)-(4), (5), (9); (1)-(4), (6), (9); (1)-(4), (7), (9); (1)-(4), (8), (9) існують і задані й шукані функції задовольняють умови застосовності залучених далі прямих та обернених інтегральних і гібридних інтегральних перетворень [6, 12].

Згідно з [12] визначимо скінченні пряме $F_{m,ik}$ та обернене $F_{m,ik}^{-1}$ інтегральні перетворення Фур'є щодо кутової змінної φ за формулами:

$$F_{m,ik}[f(\varphi)] = \int_0^{\varphi_0} f(\varphi) U_{m,ik}(\varphi) d\varphi \equiv f_{m,ik}, \qquad (10)$$

$$F_{m,ik}^{-1}[f_{m,ik}] = \frac{2}{\varphi_0} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m^{ik} f_{m,ik} U_{m,ik}(\varphi) \equiv f(\varphi), \qquad (11)$$

де

$$U_{m,11}(\varphi) = \sin(\beta_{m,11}\varphi); \beta_{m,11} = \frac{\pi m}{\varphi_0};$$

$$U_{m,12}(\varphi) = \sin(\beta_{m,12}\varphi); \beta_{m,12} = \frac{\pi(2m+1)}{2\varphi_0};$$

$$U_{m,21}(\varphi) = \cos(\beta_{m,21}\varphi);\ \beta_{m,21} = \beta_{m,12};$$

$$U_{m,22}(\varphi) = \cos(\beta_{m,22}\varphi);\ \beta_{m,22} = \beta_{m,11};$$

$$\varepsilon_0^{11} = \varepsilon_0^{12} = \varepsilon_0^{21} = 0;\ \varepsilon_0^{22} = \frac{1}{2};\ \varepsilon_m^{11} = \varepsilon_m^{12} = \varepsilon_m^{21} = 1;\ \varepsilon_m^{22} = 1;\ m = 1, 2, 3, \ldots.$$

Безпосередньо перевіряється, що для інтегрального оператора $F_{m,ik}$ виконується тотожність

$$F_{m,ik}\left[\frac{d^2 f}{d\varphi^2}\right] = -\beta_{m,ik}^2 f_{m,ik} + \Phi_{m,ik};\ i,k = 1,2, \qquad (12)$$

де

$$\Phi_{m,11}=\frac{\pi m}{\varphi_0}\Big[\,f(0)+(-1)^{m+1}f(\varphi_0)\Big]\;;$$

$$\Phi_{m,12}=\frac{\pi(2m+1)}{2\varphi_0}\,f(0)+(-1)^m\left.\frac{df}{d\varphi}\right|_{\varphi=\varphi_0}\;;$$

$$\Phi_{m,21}=-\left.\frac{df}{d\varphi}\right|_{\varphi=0}+(-1)^m\frac{\pi(2m+1)}{2\varphi_0}\,f(\varphi_0);$$

$$\Phi_{m,22}=-\left.\frac{df}{d\varphi}\right|_{\varphi=0}+(-1)^m\left.\frac{df}{d\varphi}\right|_{\varphi=\varphi_0}.$$

Інтегральний оператор $F_{m,ik}$, який діє за формулою (10), внаслідок тотожності (12) ставить у відповідність тривимірним початково-крайовим задачам спряження (1)-(4), (5), (9); (1)-(4), (6), (9); (1)-(4), (7), (9); (1)-(4), (8), (9) задачу побудови обмеженого на множині $D'=\left\{(t,r,z):t>0;r\in I_n^+;z\in(-l_1;l_2)\right\}$ класичного розв'язку двовимірних диференціальних рівнянь гіперболічного типу 2-го порядку

$$\frac{\partial^2 u_{jm,ik}}{\partial t^2}-\left[a_{rj}^2\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\nu_{jm,ik}^2}{r^2}\right)+a_{zj}^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]u_{jm,ik}+\chi_j^2 u_{jm,ik}= \tag{13}$$

$$=G_{jm,ik}(t,r,z);\;\; r\in I_j;\;\; j=\overline{1,n+1}$$

з початковими умовами

$$u_{jm,ik}(t,r,z)\big|_{t=0}=g^1_{jm,ik}(r,z);\quad \left.\frac{\partial u_{jm,ik}(t,r,z)}{\partial t}\right|_{t=0}=g^2_{jm,ik}(r,z), \tag{14}$$

крайовими умовами

$$\left.\left(-\frac{\partial}{\partial z}+h_1\right)u_{jm,ik}\right|_{z=-l_1}=w^1_{jm,ik}(t,r);\;\left.\left(\frac{\partial}{\partial z}+h_2\right)u_{jm,ik}\right|_{z=l_2}=w^2_{jm,ik}(t,r); \tag{15}$$

$$\left.\left(\alpha_{11}^0\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{11}^0\right)u_{1m,ik}\right|_{r=R_0}=g_{0m,ik}(t,z);\quad \left.\frac{\partial^s u_{n+1,m,ik}}{\partial r^s}\right|_{r=+\infty}=0;\; s=0,1 \tag{16}$$

та умовами спряження

$$\left.\left[\left(\alpha_{j1}^p\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{j1}^p\right)u_{pm,ik}-\left(\alpha_{j2}^p\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{j2}^p\right)u_{p+1,m,ik}\right]\right|_{r=R_p}=0;\, j=1,2;\, p=\overline{1,n}, \tag{17}$$

де

$$G_{jm,ik}(t,r,z)=f_{m,ik}(t,r,z)+a_{\varphi j}^2 r^{-2}\Phi_{m,ik}(t,r,z);\;\nu_{jm,ik}=a_{rj}^{-1}a_{\varphi j}\beta_{m,ik}.$$

До двовимірної крайової задачі (13)-(17) застосуємо скінченне інтегральне перетворення Фур'є на декартовому сегменті $(-l_1;l_2)$ щодо змінної z [6]:

$$\Lambda_s\left[f(z)\right]=\int_{-l_1}^{l_2} f(z)V_s(z+l_1)dz\equiv f_s, \tag{18}$$

$$\Lambda_s^{-1}[f_s]=\sum_{s=1}^{\infty} f_s\frac{V_s\left(z+l_1\right)}{\left\|V_s\left(z+l_1\right)\right\|^2}\equiv f(z), \tag{19}$$

$$\Lambda_s\left[\frac{d^2f}{dz^2}\right]=-\gamma_s^2 f_s+V_s\left(0\right)\left(-\frac{df}{dz}+h_1 f\right)\Bigg|_{z=-l_1}+V_s\left(l\right)\left(\frac{df}{dz}+h_2 f\right)\Bigg|_{z=l_2}; \tag{20}$$

$$l=l_1+l_2.$$

У формулах (18)-(20) використовується спектральна функція (ядро перетворення)

$$V_s(z+l_1)=\frac{\gamma_s\cos\gamma_s(z+l_1)+h_1\sin\gamma_s(z+l_1)}{\sqrt{\gamma_s^2+h_1^2}},$$

квадрат норми якої

$$\left\|V_s(z+l_1)\right\|^2\equiv\int_{-l}^{l}V_s^2(z+l_1)dz=\frac{l}{2}+\frac{\left(h_1+h_2\right)\left(\gamma_s^2+h_1h_2\right)}{2\left(\gamma_s^2+h_1^2\right)\left(\gamma_s^2+h_2^2\right)}.$$

При цьому

$$V_s\left(0\right)=\frac{\gamma_s}{\left(\gamma_s^2+h_1^2\right)};\quad V_s\left(l\right)=\frac{\gamma_s}{\left(\gamma_s^2+h_2^2\right)};$$

$\left\{\gamma_s\right\}_{s=1}^{\infty}$ – монотонно зростаюча послідовність дійсних різних додатних коренів трансцендентного рівняння

$$ctg\left(\gamma l\right)=\frac{\gamma^2-h_1h_2}{\gamma\left(h_1+h_2\right)},$$

які утворюють дискретний спектр.

Інтегральний оператор Λ_s, який діє за формулою (18), внаслідок тотожності (20) ставить у відповідність початково-крайовій задачі спряження (13)-(17) задачу побудови обмеженого на множині $D''=\left\{(t,r):\ t>0;\ r\in I_n^+\right\}$ класичного розв'язку одновимірних диференціальних рівнянь B-гіперболічного типу

$$\frac{\partial^2 u_{jm,ik,s}}{\partial t^2}-a_{rj}^2B_{\nu_{jm,ik}}[u_{jm,ik,s}]+\left(a_{zj}^2\gamma_s^2+\chi_j^2\right)u_{jm,ik,s}=P_{jm,ik,s}(t,r); \tag{21}$$

$$r\in I_j;\ j=\overline{1,n+1}$$

з початковими умовами

$$u_{jm,ik.s}(t,r)\Big|_{t=0} = g^{1}_{jm,ik,s}(r);\ \frac{\partial u_{jm,ik,s}(t,r)}{\partial t}\Bigg|_{t=0} = g^{2}_{jm,ik,s}(r), \qquad (22)$$

крайовими умовами

$$\left(\alpha^{0}_{11}\frac{\partial}{\partial r}+\beta^{0}_{11}\right)u_{1m,ik,s}\Bigg|_{r=R_0} = g_{0m,ik,s}(t);\ \frac{\partial^{p} u_{n+1,m,ik,s}}{\partial r^{p}}\Bigg|_{r=+\infty} = 0;\ p=0,1 \quad (23)$$

та умовами спряження

$$\left[\left(\alpha^{p}_{j1}\frac{\partial}{\partial r}+\beta^{p}_{j1}\right)u_{pm,ik,s} - \left(\alpha^{p}_{j2}\frac{\partial}{\partial r}+\beta^{p}_{j2}\right)u_{p+1,m,ik,s}\right]\Bigg|_{r=R_p} = 0; \qquad (24)$$

$$j=1,2;\ p=\overline{1,n},$$

де $B_{\nu_{jm,ik}} = \frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\nu^2_{jm,ik}}{r^2}$ – класичний диференціальний оператор Бесселя [12],

$$P_{jm,ik,s}(t,r) = G_{jm,ik,s}(t,r) + a^2_{zj}V_s(0)w^{1}_{jm,ik}(t,r) + a^2_{zj}V_s(l)w^{2}_{jm,ik}(t,r).$$

До одновимірної початково-крайової задачі спряження (21)-(24) застосуємо гібридне інтегральне перетворення типу Вебера на полярній осі I^{+}_{n} з n точками спряження щодо радіальної змінної r [6]:

$$M_{(n)}\left[f(r)\right] = \int_{R_0}^{+\infty} f(r)V(r,\lambda)\sigma(r)rdr \equiv \tilde{f}(\lambda), \qquad (25)$$

$$M^{-1}_{(n)}\left[\tilde{f}(\lambda)\right] = \int_{0}^{+\infty} \tilde{f}(\lambda)V(r,\lambda)\Omega(\lambda)d\lambda \equiv f(r), \qquad (26)$$

$$M_{(n)}\left[B_{(m,ik)}[f(r)]\right] = -\lambda^2\tilde{f}(\lambda) - \sum_{k=1}^{n+1}\alpha^2_k\int_{R_{k-1}}^{R_k} f(r)V_k(r,\lambda)\sigma_k rdr -$$
$$-a^2_1\left(\alpha^{0}_{11}\right)^{-1}R_0\sigma_1V_1(R_0,\lambda)\left(\alpha_{11}\frac{df}{dr}+\beta_{11}f\right)\Bigg|_{r=R_0}. \qquad (27)$$

У формулах (25)-(27) беруть участь, виписані в [6], спектральна функція $V(r,\lambda)$, вагова функція $\sigma(r)$, спектральна щільність $\Omega(\lambda)$ та гібридний диференціальний оператор Бесселя

$$B_{(m,ik)} = \sum_{j=1}^{n} a^2_j\theta(r-R_{j-1})\theta(R_j-r)B_{\nu_{jm,ik}} + a^2_{n+1}\theta(r-R_n)B_{\nu_{n+1,m,ik}},$$

де $\theta(x)$ – одинична функція Гевісайда [12], $a^2_{rk} \equiv a^2_k$, α^2_k – деякі сталі.

Запишемо диференціальні рівняння (21) та початкові умови (22) у матричній формі

$$\begin{bmatrix} \left(\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - a_1^2 B_{\nu_{1m,ik}} + q_{1s}^2\right) u_{1m,ik,s}(t,r) \\ \left(\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - a_2^2 B_{\nu_{2m,ik}} + q_{2s}^2\right) u_{2m,ik,s}(t,r) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \left(\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - a_{n+1}^2 B_{\nu_{n+1,m,ik}} + q_{n+1,s}^2\right) u_{n+1,m,ik,s}(t,r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{1m,ik,s}(t,r) \\ P_{2m,ik,s}(t,r) \\ \cdots\cdots\cdots \\ P_{n+1,m,ik,s}(t,r) \end{bmatrix}, \quad (28)$$

$$\left.\begin{bmatrix} u_{1m,ik,s}(t,r) \\ u_{2m,ik,s}(t,r) \\ \cdots\cdots\cdots \\ u_{n+1,m,ik,s}(t,r) \end{bmatrix}\right|_{t=0} = \begin{bmatrix} g_{1m,ik,s}^1(r) \\ g_{2m,ik,s}^1(r) \\ \cdots\cdots\cdots \\ g_{n+1,m,ik,s}^1(r) \end{bmatrix};$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} u_{1m,ik,s}(t,r) \\ u_{2m,ik,s}(t,r) \\ \cdots\cdots\cdots \\ u_{n+1,m,ik,s}(t,r) \end{bmatrix}\right|_{t=0} = \begin{bmatrix} g_{1m,ik,s}^2(r) \\ g_{2m,ik,s}^2(r) \\ \cdots\cdots\cdots \\ g_{n+1,m,ik,s}^2(r) \end{bmatrix}, \quad (29)$$

де

$$q_{js}^2 = a_{zj}^2 \gamma_s^2 + \chi_j^2; \quad j = \overline{1, n+1}.$$

Інтегральний оператор $M_{(n)}$, який діє за формулою (25), зобразимо у вигляді операторної матриці-рядка

$$M_{(n)}[\cdots] = \Bigg[\int\limits_{R_0}^{R_1} \cdots V_1(r,\lambda)\sigma_1 r dr \quad \int\limits_{R_1}^{R_2} \cdots V_2(r,\lambda)\sigma_2 r dr \quad \cdots \int\limits_{R_{n-1}}^{R_n} \cdots V_n(r,\lambda)\sigma_n r dr \quad \int\limits_{R_n}^{+\infty} \cdots V_{n+1}(r,\lambda)\sigma_{n+1} r dr\Bigg] \quad (30)$$

і застосуємо за правилом множення матриць до задачі (28), (29). Внаслідок тотожності (27) одержуємо задачу Коші для звичайного неоднорідного диференціального рівняння 2-го порядку

$$\sum_{j=1}^{n+1}\left(\frac{d^2}{dt^2} + \lambda^2 + \alpha_j^2 + q_{js}^2\right)\tilde{u}_{jm,ik,s}(t,\lambda) = \sum_{j=1}^{n+1}\tilde{P}_{jm,ik,s}(t,\lambda) - $$
$$-a_1^2\left(\alpha_{11}^0\right)^{-1} R_0 \sigma_1 V_1(R_0,\lambda)\tilde{g}_{0m,ik}(t,\sigma), \quad (31)$$

$$\sum_{j=1}^{n+1}\tilde{u}_{jm,ik,s}(t,\lambda)\Big|_{t=0}=\sum_{j=1}^{n+1}\tilde{g}^{1}_{jm,ik,s}(\lambda),\ \frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{n+1}\tilde{u}_{jm,ik,s}(t,\lambda)\Big|_{t=0}=\sum_{j=1}^{n+1}\tilde{g}^{2}_{jm,ik,s}(\lambda), \quad (32)$$

де

$$\tilde{u}_{jm,ik,s}(t,\lambda)=\int_{R_{j-1}}^{R_j}u_{jm,ik,s}(t,r)V_j(r,\lambda)\sigma_j r dr;\ \ j=\overline{1,n+1},$$

$$\tilde{P}_{jm,ik,s}(t,\lambda)=\int_{R_{j-1}}^{R_j}P_{jm,ik,s}(t,r)V_j(r,\lambda)\sigma_j r dr;\ \ j=\overline{1,n+1},$$

$$\tilde{g}^{p}_{jm,ik,s}(\lambda)=\int_{R_{j-1}}^{R_j}g^{p}_{jm,ik,s}(r)V_j(r,\lambda)\sigma_j r dr,\ \ j=\overline{1,n+1},\ p=1,2.$$

Припустимо, не зменшуючи загальності розв'язку задачі, що $\max\left\{q_{1s}^2,\, q_{2s}^2,\, ...,\, q_{n+1,s}^2\right\}=q_{1s}^2$ і покладемо всюди $\alpha_j^2=q_{1s}^2-q_{js}^2;\ \ j=\overline{1,n+1}.$ Задача Коші (31), (32) набуває вигляду

$$\frac{d^2\tilde{u}_{m,ik,s}}{dt^2}+\Delta^2(\lambda,\gamma_s)\tilde{u}_{m,ik,s}=\tilde{P}_{m,ik,s}(t,\lambda)-\frac{a_1^2}{\alpha_{11}^0}R_0\sigma_1V_1(R_0,\lambda)\tilde{g}_{0m,ik,s}(t,\sigma), \quad (33)$$

$$\tilde{u}_{m,ik,s}(t,\lambda)\Big|_{t=0}=\tilde{g}^{1}_{m,ik,s}(\lambda),\frac{d}{dt}\tilde{u}_{m,ik,s}(t,\lambda)\Big|_{t=0}=\tilde{g}^{2}_{m,ik,s}(\lambda), \quad (34)$$

де

$$\tilde{u}_{m,ik,s}(t,\lambda)=\sum_{j=1}^{n+1}\tilde{u}_{jm,ik,s}(t,\lambda);\ \ \Delta^2(\lambda,\gamma_s)=\lambda^2+a_{z1}^2\gamma_s^2+\chi_1^2;$$

$$\tilde{P}_{m,ik,s}(t,\lambda)=\sum_{j=1}^{n+1}\tilde{P}_{jm,ik,s}(t,\lambda);\ \tilde{g}^{p}_{m,ik,s}(\lambda)=\sum_{j=1}^{n+1}\tilde{g}^{p}_{jm,ik,s}(\lambda);\ \ p=1,2.$$

Відомо [6], що єдиним розв'язком задачі Коші (33), (34) є функція

$$\tilde{u}_{m,ik,s}(t,\lambda)=N(t,\lambda,\gamma_s)\tilde{g}^{2}_{m,ik,s}(\lambda)+\frac{d}{dt}N(t,\lambda,\gamma_s)\tilde{g}^{1}_{m,ik,s}(\lambda)+ \\ +\int_0^t N(t-\tau,\lambda,\gamma_s)\tilde{P}_{m,ik,s}(\tau,\lambda)d\tau, \quad (35)$$

де розв'язуюча функція (функція Коші) має вигляд

$$N(t,\lambda,\gamma_s)=\frac{\sin(\Delta(\lambda,\gamma_s)t)}{\Delta(\lambda,\gamma_s)},\ \Delta(\lambda,\gamma_s)=\left(\lambda^2+a_{z1}^2\gamma_s^2+\chi_1^2\right)^{1/2}.$$

Оскільки суперпозиція операторів $M_{(n)}$ та $M_{(n)}^{-1}$ є одиничним оператором $(M_{(n)}\circ M_{(n)}^{-1}=M_{(n)}^{-1}\circ M_{(n)}=I)$, то оператор $M_{(n)}^{-1}$, як обернений до оператора (30), зобразимо у вигляді операторної матриці-стовпця

$$M_{(n)}^{-1}\left[\cdots\right]=\begin{bmatrix}\int\limits_0^{+\infty}\cdots V_1(r,\lambda)\Omega(\lambda)\,d\lambda\\ \int\limits_0^{+\infty}\cdots V_2(r,\lambda)\Omega(\lambda)\,d\lambda\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \int\limits_0^{+\infty}\cdots V_{n+1}(r,\lambda)\Omega(\lambda)\,d\lambda\end{bmatrix} \tag{36}$$

і застосуємо за правилом множення матриць до матриці-елемента $\left[\tilde{u}_{m,ik,s}(t,\lambda)\right]$, де функція $\tilde{u}_{m,ik,s}(t,\lambda)$ визначена за формулою (35). Одержуємо єдиний розв’язок одновимірної гіперболічної початково-крайової задачі спряження (21)-(24):

$$u_{jm,ik,s}(t,r)=\int\limits_0^{+\infty}\tilde{u}_{m,ik,s}(t,\lambda)V_j(r,\lambda)\Omega(\lambda)\,d\lambda;\ j=\overline{1,n+1}. \tag{37}$$

Застосувавши послідовно до функцій $u_{jm,ik,s}(t,\lambda)$, визначених формулами (37), обернені оператори Λ_s^{-1} та $F_{m,ik}^{-1}$, і виконавши нескладні перетворення, одержуємо функції

$$u_j(t,r,\varphi,z)=$$

$$=\sum_{p=1}^{n+1}\int\limits_0^t\int\limits_{R_{p-1}}^{R_p}\int\limits_0^{\varphi_0}\int\limits_{-l}^{l_2}E_{jp}^{ik}(t-\tau,r,\rho,\varphi,\alpha,z,\xi)f_p(\tau,\rho,\alpha,\xi)\sigma_p\rho d\xi d\alpha d\rho d\tau+$$

$$+\frac{\partial}{\partial t}\sum_{p=1}^{n+1}\int\limits_{R_{p-1}}^{R_p}\int\limits_0^{\varphi_0}\int\limits_{-l_1}^{l_2}E_{jp}^{ik}(t,r,\rho,\varphi,\alpha,z,\xi)g_p^1(\rho,\alpha,\xi)\sigma_p\rho d\xi d\alpha d\rho+$$

$$+\sum_{p=1}^{n+1}\int\limits_{R_{p-1}}^{R_p}\int\limits_0^{\varphi_0}\int\limits_{-l_1}^{l_2}E_{jp}^{ik}(t,r,\rho,\varphi,\alpha,z,\xi)g_p^2(\rho,\alpha,\xi)\sigma_p\rho d\xi d\alpha d\rho+$$

$$+\sum_{p=1}^{n+1}a_{\varphi p}^2\int\limits_0^t\int\limits_{R_{p-1}}^{R_p}\int\limits_{-l_1}^{l_2}Q_{jp}^{ik}(t,\tau,r,\rho,\varphi,z,\xi)\sigma_p\rho^{-1}d\xi d\rho d\tau+ \tag{38}$$

$$+\sum_{p=1}^{n+1}a_{zp}^2\int\limits_0^t\int\limits_{R_{p-1}}^{R_p}\int\limits_0^{\varphi_0}\Big[W_{jp,1}^{ik}(t-\tau,r,\rho,\varphi,\alpha,z)w_p^1(\tau,\rho,\alpha)+$$

$$+W_{jp,2}^{ik}(t-\tau,r,\rho,\varphi,\alpha,z)w_p^2(\tau,\rho,\alpha)\Big]\sigma_p\rho d\alpha d\rho d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_0^{\varphi_0}\int_{-l_1}^{l_2} W_{jr}^{ik}(t-\tau,r,\varphi,\alpha,z,\xi)g_0(\tau,\alpha,\xi)d\xi d\alpha d\tau;\ j=\overline{1,n+1},$$

які визначають єдині розв'язки гіперболічних початково-крайових задач спряження (1)-(4), (5), (9); (1)-(4), (6), (9); (1)-(4), (7), (9); (1)-(4), (8), (9) при відповідних значеннях ik (11), (12), (21), (22).

У формулах (38) застосовано компоненти

$$E_{jp}^{ik}(t,r,\rho,\varphi,\alpha,z,\xi)=\frac{2}{\varphi_0}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m^{ik}K_{jp}^{m,ik}(t,r,\rho,z,\xi)U_{m,ik}(\varphi)U_{m,ik}(\alpha)$$

матриці впливу (функції впливу), функції Гріна

$$Q_{jp}^{ik}(t,\tau,r,\rho,\varphi,z,\xi)=\frac{2}{\varphi_0}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m^{ik}K_{jp}^{m,ik}(t-\tau,r,\rho,z,\xi)\Phi_{m,ik}(\tau,\rho,\xi)U_{m,ik}(\varphi),$$

компоненти

$$W_{jp,1}^{ik}(t,r,\rho,\varphi,\alpha,z)=E_{jp}^{ik}(t,r,\rho,\varphi,\alpha,z,-l_1)$$

нижньої аплікатної матриці Гріна (нижні аплікатні функції Гріна), компоненти

$$W_{jp,2}^{ik}(t,r,\rho,\varphi,\alpha,z)=E_{jp}^{ik}(t,r,\rho,\varphi,\alpha,z,l_2)$$

верхньої аплікатної матриці Гріна (верхні аплікатні функції Гріна) та компоненти

$$W_{jr}^{ik}(t,r,\varphi,\alpha,z,\xi)=-a_1^2\left(\alpha_{11}^0\right)^{-1}R_0\sigma_1E_{j1}^{ik}(t,r,R_0,\varphi,\alpha,z,\xi)$$

радіальної матриці Гріна (радіальні функції Гріна) відповідних початково-крайових задач, де

$$K_{jp}^{m,ik}(t,r,\rho,z,\xi)=\sum_{s=1}^{\infty}\int_0^{+\infty}N(t,\lambda,\gamma_s)V_j(r,\lambda)V_p(\rho,\lambda)\Omega(\lambda)\,d\lambda\times$$

$$\times\frac{V_s\left(z+l_1\right)V_s\left(\xi+l_1\right)}{\left\|V_s\left(z+l_1\right)\right\|^2};\ j,p=\overline{1,n+1}.$$

Проаналізуємо формули (38) залежно від типу крайових умов на гранях кусково-однорідного клиновидного циліндрично-кругового шару. Розглянемо, наприклад, випадок крайових умов (5) (умови Діріхле). У цьому випадку функції Гріна мають вигляд

$$Q_{jp}^{11}(t,\tau,r,\rho,\varphi,z,\xi)=$$

$$=\frac{2\pi}{\varphi_0^2}\sum_{m=1}^{\infty}mK_{jp}^{m,11}(t-\tau,r,\rho,z,\xi)\left[g_{1p}(\tau,\rho,\xi)+(-1)^{m+1}w_{1p}(\tau,\rho,\xi)\right]\sin\frac{\pi m\varphi}{\varphi_0}.$$

Якщо визначити тангенціальні функції Гріна

$$\overline{W}^{11}_{jp,1}(t,\tau,r,\rho,\varphi,z,\xi)=\frac{2\pi}{\varphi_0^2}\sum_{m=1}^{\infty}mK_{jp}^{m,11}(t-\tau,r,\rho,z,\xi)\sin\frac{\pi m\varphi}{\varphi_0},$$

$$\overline{W}^{11}_{jp,2}(t,\tau,r,\rho,\varphi,z,\xi)=\frac{2\pi}{\varphi_0^2}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}mK_{jp}^{m,11}(t-\tau,r,\rho,z,\xi)\sin\frac{\pi m\varphi}{\varphi_0},$$

то розв'язок задачі (1)-(4), (5), (9) можемо записати у вигляді

$$u_j(t,r,\varphi,z)=$$

$$=\sum_{p=1}^{n+1}\int_0^t\int_{R_{p-1}}^{R_p}\int_0^{\varphi_0}\int_{-l_1}^{l_2}E_{jp}^{11}(t-\tau,r,\rho,\varphi,\alpha,z,\xi)f_p(\tau,\rho,\alpha,\xi)\sigma_\rho\rho d\xi d\alpha d\rho d\tau+$$

$$+\frac{\partial}{\partial t}\sum_{p=1}^{n+1}\int_{R_{p-1}}^{R_p}\int_0^{\varphi_0}\int_{-l_1}^{l_2}E_{jp}^{11}(t,r,\rho,\varphi,\alpha,z,\xi)g_p^1(\rho,\alpha,\xi)\sigma_\rho\rho d\xi d\alpha d\rho+$$

$$+\sum_{p=1}^{n+1}\int_{R_{p-1}}^{R_p}\int_0^{\varphi_0}\int_{-l_1}^{l_2}E_{jp}^{11}(t,r,\rho,\varphi,\alpha,z,\xi)g_p^2(\rho,\alpha,\xi)\sigma_\rho\rho d\xi d\alpha d\rho+$$

$$+\sum_{p=1}^{n+1}a_{\varphi p}^2\int_0^t\int_{R_{p-1}}^{R_p}\int_{-l_1}^{l_2}\Big[\overline{W}^{11}_{jp,1}(t,\tau,r,\rho,\varphi,z,\xi)g_{1p}(\tau,\rho,\xi)+$$

$$+\overline{W}^{11}_{jp,2}(t,\tau,r,\rho,\varphi,z,\xi)w_{1p}(\tau,\rho,\xi)\Big]\sigma_p\rho^{-1}d\xi d\rho d\tau+$$

$$+\sum_{p=1}^{n+1}a_{zp}^2\int_0^t\int_{R_{p-1}}^{R_p}\int_0^{\varphi_0}\Big[W^{11}_{jp,1}(t-\tau,r,\rho,\varphi,\alpha,z)w_p^1(\tau,\rho,\alpha)+$$

$$+W^{11}_{jp,2}(t-\tau,r,\rho,\varphi,\alpha,z)w_p^2(\tau,\rho,\alpha)\Big]\sigma_p\rho d\alpha d\rho d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_0^{\varphi_0}\int_{-l_1}^{l_2}W^{11}_{jr}(t-\tau,r,\varphi,\alpha,z,\xi)g_0(\tau,\alpha,\xi)d\xi d\alpha d\tau;\ j=\overline{1,n+1}. \qquad (39)$$

З використанням властивостей функцій впливу і функцій Гріна безпосередньо перевіряємо, що функції $u_j(t,r,\varphi,z)$, визначені формулами (39), задовольняють рівняння (1), початкові умови (2), крайові умови (3)-(5) та умови спряження (9) в сенсі теорії узагальнених функцій.

Єдиність розв'язку (39) випливає із його структури (інтегрального зображення) та єдиності головних розв'язків (функцій впливу та функцій Гріна) гіперболічної початково-крайової задачі (1)-(4), (5), (9).

Можна довести, що при відповідних умовах на вихідні дані, формули (39) визначають обмежений класичний розв'язок розглянутої задачі.

Підсумком викладеного вище є така теорема.

Теорема. *Якщо функції* $f_j(t,r,\varphi,z)$, $g_j^s(r,\varphi,z)$, $w_j^s(t,r,\varphi)$, $g_{1j}(t,r,z)$, $w_{1j}(t,r,z)$, $(s=1,2;\ j=\overline{1,n+1})$ *задовольняють умови:*

1) *двічі неперервно диференційовні за кожною змінною;*
2) *мають обмежену варіацію за кожною із просторових змінних;*
3) *абсолютно сумовні з ваговою функцією* $\rho(r)=\sigma(r)r$ *за змінною* r *на кусково-однорідній полярній осі* I_n^+;
4) *справджують умови спряження (9);*
5) *функція* $g_0(\tau,\varphi,z)$ *задовольняє умови 1), 2), то гіперболічна початково-крайова задача (1)-(4), (5), (9) має єдиний обмежений класичний розв'язок, який визначається за формулами (39).*

Випадки крайових умов (6), (7), (8) на гранях клина можна проаналізувати аналогічно.

Зауваження 1. *У випадку* $a_{rj}=a_{\varphi j}=a_{zj}\equiv a_j>0$ *формули (38) визначають структури розв'язків розглянутих задач в ізотропному кусково-однорідному клиновидному циліндрично-круговому шарі з порожниною.*

Зауваження 2. *Випадок зміни* φ *в межах* $\varphi_1<\varphi<\varphi_2$ *можна звести до розглянутого заміною* $\varphi'=\varphi-\varphi_1$ $(\varphi_0=\varphi_2-\varphi_1)$.

Зауваження 3. *Параметри* h_1, h_2 *дозволяють виділяти з формул (38) розв'язки початково-крайових задач у випадках задання на площинах* $z=-l_1, z=l_2$ *крайових умов 1-го й 2-го роду та їх можливих комбінацій.*

Зауваження 4. *Параметри* α_{11}^0, β_{11}^0 *дозволяють виділяти із формул (38) розв'язки крайових задач спряження у випадках задання на радіальній поверхні* $r=R_0$ *крайової умови 1-го роду (* $\alpha_{11}^0=0,\ \beta_{11}^0=1$ *), 2-го роду (* $\alpha_{11}^0=-1,\ \beta_{11}^0=0$ *) та 3-го роду (* $\alpha_{11}^0=-1,\ \beta_{11}^0\equiv h>0$ *).*

Зауваження 5. *Аналіз розв'язків (38) залежно від аналітичного виразу вихідних даних задач проводиться безпосередньо із загальних структур.*

Висновки. Методом класичних інтегральних і гібридних інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розв'язків (функцій впливу та функцій Гріна) вперше побудовано єдині точні аналітичні розв'язки гіперболічних крайових задач у кусково-однорідному клиновидному циліндрично-круговому шарі з порожниною. Одержані інтегральні зображення розв'язків носять алгоритмічний характер, неперервно залежать від параметрів і даних задачі та можуть бути використані як у подальших теоретичних дослідженнях, так і в практиці інженерних розрахунків математичних моделей коливних процесів у кусково-однорідних середовищах, які описуються циліндричною системою координат.

Список використаних джерел:

1. Hadamard J. Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques: leçons professées à l'Université Yale. Paris: Hermann et cie, 1932. 542 p.
2. Gårding L. Cauchy's Problem for Hyperbolic Equations: Winter And Spring Quarters. University of Chicago, 1957. 240 p.
3. Митропольський Ю. А., Хома Г. П., Громяк М. И. Асимптотические методы исследования квазиволновых уравнений гиперболического типа. Киев: Наук. думка, 1991. 232 с.
4. Самойленко А. М., Ткач Б. П. Численно-аналитические методы в теории периодических решений уравнений с частными производными. Киев: Наук. думка, 1992. 208 с.
5. Конет І. М. Гіперболічні крайові задачі математичної фізики в кусково-однорідних просторових середовищах. Кам'янець-Подільський: Абетка-Світ, 2013. 120 с.
6. Конет І. М., Пилипюк Т. М. Гіперболічні крайові задачі в кусково-однорідних циліндрично-кругових середовищах. Кам'янець-Подільський: Абетка-Світ, 2017. 84 с.
7. Конет І. М., Пилипюк Т. М. Крайові задачі в кусково-однорідних циліндрично-кругових середовищах. Чернівці: Технодрук, 2019. 200 с.
8. Громик А. П., Конет І. М. Гіперболічні крайові задачі математичної фізики в кусково-однорідних циліндричних середовищах. Кам'янець-Подільський: ПП «Видавництво Абетка світ», 2020. 200 с.
9. Сергиенко И. В., Скопецкий В. В., Дейнека В. С. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах. Киев: Наук. думка, 1991. 432 с.
10. Дейнека В. С., Сергиенко И. В., Скопецкий В. В. Модели и методы решения задач с условиями сопряжения. Киев: Наук. думка, 1998. 614 с.
11. Дейнека В. С., Сергиенко И. В. Модели и методы решения задач в неоднородных средах. Киев: Наук. думка, 2001. 606 с.
12. Конет І. М., Ленюк М. П. Стаціонарні та нестаціонарні температурні поля в циліндрично-кругових областях. Чернівці: Прут, 2001. 312 с.
13. Громик А. П., Конет І. М., Ленюк М. П. Температурні поля в кусково-однорідних просторових середовищах. Кам'янець-Подільський: Абетка-Світ, 2011. 200 с.
14. Конет І. М., Пилипюк Т. М. Параболічні крайові задачі в кусково-однорідних середовищах. Кам'янець-Подільський: Абетка-Світ, 2016. 244 с.
15. Самойленко В. Г., Конет І. М. Рівняння математичної фізики. Київ: ВПЦ «Київський університет», 2014. 283 с.

References:

1. Hadamard J. Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques: leçons professées à l'Université Yale. Paris: Hermann et cie, 1932. 542 p.
2. Gårding L. Cauchy's Problem for Hyperbolic Equations: Winter And Spring Quarters. University of Chicago, 1957. 240 p.
3. Mytropolskyi Yu. A., Khoma H. P., Hromiak M. Y. Asymptotycheskye metody yssledovanyia kvazyvolnovykh uravnenyi hyperbolycheskoho typa. Kyev: Nauk. dumka, 1991. 232 p.
4. Samoilenko A. M., Tkach B. P. Chyslenno-analytycheskye metody v teoryy peryodycheskykh reshenyi uravnenyi s chastnymy proyzvodnymy. Kyev: Nauk. dumka, 1992. 208 p.
5. Konet I. M. Hiperbolichni kraiovi zadachi matematychnoi fizyky v kuskovo-odnoridnykh prostorovykh seredovyshchakh. Kamianets-Podilskyi: Abetka-Svit, 2013. 120 p.
6. Konet I. M., Pylypiuk T. M. Hiperbolichni kraiovi zadachi v kuskovo-odnoridnykh tsylindrychno-kruhovykh seredovyshchakh. Kamianets-Podilskyi: Abetka-Svit, 2017. 84 p.
7. Konet I. M., Pylypiuk T. M. Kraiovi zadachi v kuskovo-odnoridnykh tsylindrychno-kruhovykh seredovyshchakh. Chernivtsi: Tekhnodruk, 2019. 200 p.
8. Hromyk A. P., Konet I. M. Hiperbolichni kraiovi zadachi matematychnoi fizyky v kuskovo-odnoridnykh tsylindrychnykh seredovyshchakh. Kamianets-Podilskyi: PP «Vydavnytstvo Abetka svit», 2020. 200 p.
9. Serhyenko Y. V., Skopetskyi V. V., Deineka V. S. Matematycheskoe modelyrovanye y yssledovanye protsessov v neodnorodnykh sredakh. Kyev: Nauk. dumka, 1991. 432 p.
10. Deineka V. S., Serhyenko Y. V., Skopetskyi V. V. Modely y metody reshenyia zadach s uslovyiamy sopriazhenyia. Kyev: Nauk. dumka, 1998. 614 p.
11. Deineka V. S., Serhyenko Y. V. Modely y metody reshenyia zadach v neodnorodnykh sredakh. Kyev: Nauk. dumka, 2001. 606 p.
12. Konet I. M., Leniuk M. P. Statsionarni ta nestatsionarni temperaturni polia v tsylindrychno-kruhovykh oblastiakh. Chernivtsi: Prut, 2001. 312 p.
13. Hromyk A. P., Konet I. M., Leniuk M. P. Temperaturni polia v kuskovo-odnoridnykh prostorovykh seredovyshchakh. Kamianets-Podilskyi: Abetka-Svit, 2011. 200 p.
14. Konet I. M., Pylypiuk T. M. Parabolichni kraiovi zadachi v kuskovo-odnoridnykh seredovyshchakh. Kamianets-Podilskyi: Abetka-Svit, 2016. 244 p.
15. Samoilenko V. H., Konet I. M. Rivniannia matematychnoi fizyky. Kyiv: VPTs «Kyivskyi universytet», 2014. 283 p.

HYPERBOLIC BOUNDARY VALUE PROBLEMS OF MATHEMATICAL PHYSICS IN A PIECEWISE HOMOGENEOUS WEDGE-SHAPED CYLINDRICAL-CIRCULAR LAYER WITH A CAVITY

The unique exact analytical solutions of hyperbolic boundary value problems of mathematical physics in piecewise homogeneous by the radial variable *r*, wedge-shaped by the angular variable φ, cylindrical-circular layer with a cavity were constructed at first time by the method of classical integral and hybrid integral transforms in combination with method of main solutions (influence matrices and Green’s matrices) in the proposed article.

The cases of assigning on the wedge's verge the boundary conditions of the 1st kind (Dirichlet) and the 2nd kind (Neumann) and their possible combinations (Dirichlet – Neumann, Neumann – Dirichlet) are considered.

Finite Fourier integral transform by an angular variable φ, an integral Fourier transform on the Cartesian semiaxis by an applicative variable z and hybrid Weber-type integral transform on the polar axis $(R_0; +\infty)$ with n conjugate points by the radial variable were used to construct solutions of investigated boundary value problems.

The consistent application of integral transforms by geometric variables allows us to reduce the three-dimensional initial boundary-value problems of conjugation to the Cauchy problem for an ordinary linear inhomogeneous 2nd order differential equation whose unique solution is written in a closed form.

The application of inverse integral transforms to the obtained solution in the space of images restores in an explicit form in the space of the originals the solutions of the considered hyperbolic boundary value problems of mathematical physics through their integral image.

At the same time, the main solutions of the problems are obtained in an explicit form.

Key words: *hyperbolic equation, initial and boundary conditions, conjugation conditions, integral transforms, hybrid integral transforms, main solutions.*