

УДК 517.927.4:517.988.8

DOI: 10.32626/2308-5878.2026-30.127-147

Савченко А. В.

ORCID: 0009-0004-7547-8655,

Харківський національний університет
радіоелектроніки, м. Харків, Україна,

E-mail: anton.savchenko@nure.ua

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ДВОБІЧНИХ НАБЛИЖЕНЬ ДО АНАЛІЗУ ВПЛИВУ ТИПІВ ЗАКРІПЛЕННЯ КІНЦІВ НА СТАТИЧНИЙ ПРОГІН БАЛКИ В МОДЕЛЯХ МІКРОЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ

У статті досліджено крайову задачу для напівплінійного диференціального рівняння четвертого порядку, що описує статичний прогин балки в мікроелектромеханічних системах (МЕМС). На відміну від попередніх досліджень, де розглядалися лише класичні умови жорсткого закріплення та шарнірного обпирання, у роботі досліджено шість типів крайових умов: обидва кінці балки жорстко закріплені, обидва кінці балки шарнірно оперті, лівий кінець балки жорстко закріплений, а правий – вільний, лівий кінець балки жорстко закріплений, а правий – «ковзас», лівий кінець балки жорстко закріплений, а правий – шарнірно опертий, лівий кінець балки шарнірно опертий, правий – «ковзас». Розглянуті конфігурації охоплюють основні конструктивні схеми сучасних МЕМС-пристроїв – від мікроперемикачів і резонаторів до зондів атомно-силових мікроскопів, мікродзеркал та п'єзоелектричних збирачів енергії.

Для дослідження зазначених задач застосовано метод двобічних наближень, побудований у напівопорядкованому банаховому просторі неперервних функцій. Вихідну крайову задачу зведено до нелінійного інтегрального рівняння Гаммерштейна з ізотонним оператором, ядром якого є відповідна функція Гріна. Для кожного з шести типів закріплення кінців балки побудовано функцію Гріна та обчислено максимальний безрозмірний прогин балки під дією одиничного рівномірно розподіленого навантаження. На основі ізотонності інтегрального оператора побудовано інваріантний конусний відрізок та сформульовано теорему про існування й єдиність додатного розв'язку крайової задачі, до якого двобічно збігається ітераційний процес.

Стаття надійшла до редакції: 15.05.2026

Рекомендовано до друку: 20.05.2026

Оприлюднено (online): 29.05.2026

Ця стаття розповсюджується на умовах ліцензії CC Attribution-NonCommercial-NoDerivatives 4.0

Проведено обчислювальний експеримент при значеннях параметрів реального МЕМС-актюатора. Для кожного типу закріплення обчислено найбільше значення прикладеної напруги, при якому виконуються достатні умови збіжності методу, побудовано наближені розв'язки. Встановлено впорядкування шести типів закріплення кінців балки за величиною, що дає кількісну основу для вибору оптимального типу закріплення кінців балки при проєктуванні МЕМС-пристроїв з різними робочими характеристиками.

Новизна роботи полягає в розвитку методу двобічних наближень в частині його застосування до крайових задач з набором шести фізично значущих типів крайових умов. Це дозволяє для кожної конфігурації отримати верифіковані наближення прогину з апіорними двосторонніми оцінками в межах конструктивно встановленого безпечного робочого діапазону прикладеної напруги. Отримані результати можуть бути безпосередньо застосовні при проєктуванні мікроперемикачів, мікрорезонаторів, сенсорів, мікродзеркал та п'єзоелектричних мікроактюаторів. Розроблена схема методу може бути поширена на узагальнення моделі – змінну діелектричну проникність, часткове електростатичне навантаження, нелінійності іншого вигляду, а також (у комбінації з методом Рунге) на нестационарний випадок.

Ключові слова: балка, жорстке закріплення, ізотонний оператор, інваріантний конусний відрізок, консольна балка, крайова задача, крайові умови для балки, математичне моделювання, метод двобічних наближень, мікроелектромеханічна система, прогин, рівняння Гаммерштейна, функція Гріна, чисельні методи, шарнірно оперта балка.

Вступ. Мікроелектромеханічні системи (МЕМС) є класом пристроїв, які поєднують механічні та електронні структури на одному мікрочипі для збору, обробки даних та виконання фізичних дій. За останні десятиліття технологія МЕМС здійснила революцію в споживчій електроніці, автомобільній промисловості, медицині та аерокосмічній галузі – від перших акселерометрів для систем подушок безпеки до складних мікродзеркальних матриць для проєкційних систем. Еволюція цих пристроїв нерозривно пов'язана з вдосконаленням математичних моделей, що описують їх поведінку.

Ключовим конструктивним елементом значної частини МЕМС є балка – пружний елемент, підвішений над нерухожим електродом [1, 2]. При прикладанні різниці потенціалів між балкою та електродом виникає електростатична сила притягання (сила Кулона), яка деформує балку, зменшуючи зазор між електродами, що, у свою чергу, збільшує ємність системи та саму силу. Математичною моделлю даного процесу є звичайне напівлінійне диференціальне рівняння четвертого

порядку з нелінійністю типу $\frac{\lambda}{(1-u)^2}$, де u – безрозмірний прогин

балки, λ – параметр, пропорційний квадрату прикладеної напруги.

Конкретний вид крайових умов, що доповнюють вказане рівняння, визначається способом закріплення кінців балки і безпосередньо відображає конструктивну схему МЕМС-пристрою. У роботі пропонується розглянути шість фізично значущих типів закріплення кінців балки.

Двостороннє жорстке закріплення є поширеною конструктивною схемою у МЕМС-комутаторах і резонаторах [2, 3]. Шарнірне опирання обох кінців виникає при моделюванні термопружних V-подібних актюаторів [4], п'єзотермопружних резонаторів [5, 6] та систем двох пружно з'єднаних мікробалок [7]. Консольна балка (один кінець жорстко закріплений, інший – вільний) є одним з найпоширеніших типів закріплення у МЕМС-пристроях: вона використовується як резонансні датчики маси [8], зонди атомно-силових мікроскопів [9], а також як електростатичні мікроактюатори у мікроперемикачах та мікропомпах [10]. Жорстковане закріплення (один кінець жорстко закріплений, інший – «ковзає») реалізується у п'єзоелектричних збирачах енергії [11, 12] та пристроях з пасивним підлаштуванням резонансної частоти до частоти зовнішніх вібрацій [13]. Жорстко-шарнірне закріплення реалізується у бістабільних МЕМС-механізмах на основі попередньо стиснених балок [14, 15] та МЕМС-мікродзеркалах [16]. Останній тип – шарнірно-ковзане закріплення – не є самостійною конструктивною схемою у МЕМС, однак має теоретичне значення при аналізі резонансних характеристик мікробалок під дією залишкових напружень або температурних змін [17].

Наявність нелінійності у математичній моделі унеможливорює безпосереднє застосування аналітичних методів до розв'язання відповідної крайової задачі, а тому виникає потреба у розробці чисельних методів. Для дослідження математичних моделей МЕМС застосовуються метод скінченних елементів [18], метод скінченних різниць [19], метод Гальоркіна [20], метод декомпозиції Адомяна [21] тощо. Спільним недоліком вказаних методів є відсутність зручних для практичного використання оцінок похибки наближеного розв'язку. Крім того, ці методи зазвичай не дають змоги встановити умови існування розв'язку вихідної задачі.

Альтернативним підходом, позбавленим цих недоліків, є ітеративні методи з двобічним характером збіжності, а саме метод двобічних наближень, побудований на основі використання відповідних функцій Гріна. Теоретичним підґрунтям методу є теорія нелінійних операторів у напівупорядкованих банахових просторах [22, 23]. До переваг методів цього класу можна віднести те, що на кожному кроці будуються наближення, які зверху та знизу обмежують точний

розв'язок задачі, що робить отримані наближення математично верифікованими. Двобічні ітераційні методи в аналізі МЕМС використовувалися, зокрема, у роботах [24, 25], проте в них як математична модель розглядалася крайова задача для напівплінійного еліптичного рівняння другого порядку (модель мембрани). У [26] метод двобічних наближень було застосовано до моделі балки з механічним натягом (присутнім у диференціальному рівнянні через додатковий доданок, пропорційний другій похідній функції прогину) для двох класичних типів закріплення кінців. У даній роботі розглядається випадок без натягу для шести типів закріплення кінців балки.

Отже, актуальною науковою задачею є розвиток методу двобічних наближень в частині його застосування до розв'язання крайових задач для напівплінійного диференціального рівняння четвертого порядку, що моделює статичний прогин балки в МЕМС, для набору з шести фізично значущих типів крайових умов.

Постановка задачі. Розглянемо мікроелектромеханічну систему, яка складається з балки довжиною L , шириною b та товщиною h . Балка є рухомих електродом електростатичного актуатора: нерухомий заземлений електрод розміщено паралельно до балки на відстані g_0 . Коли між електродами прикладається напруга V , балка прогинається в напрямку нерухомого електрода. Позначимо через $\hat{u}(\hat{x})$ прогин у точці $\hat{x} \in [0, L]$ вздовж осі балки. Для опису деформації балки використовуємо класичну теорію Ейлера-Бернуллі, яка широко застосовується при математичному моделюванні електростатичних актуаторів, основним елементом яких є балка [2, 3, 27]. Тоді прогин балки описується рівнянням:

$$EI \frac{d^4 \hat{u}}{d\hat{x}^4} = q_{el}(\hat{x}), \quad \hat{x} \in (0, L),$$

де $\hat{u}(\hat{x})$ – функція, що є величиною прогину балки, \hat{x} – просторова координата вздовж балки, E – модуль Юнга, I – момент інерції, $q_{el}(\hat{x})$ – розподілена електростатична сила на одиницю довжини.

Розподілена електростатична сила q_{el} дорівнює [28]:

$$q_{el}(\hat{x}) = \frac{\varepsilon_0 b V^2}{2(g_0 - \hat{u}(\hat{x}))^2},$$

де V – прикладена напруга, ε_0 – електрична стала.

Тоді рівняння, що описує прогин балки під дією електростатичної сили можемо записати у вигляді

$$EI \frac{d^4 \hat{u}}{d\hat{x}^4} = \frac{\varepsilon_0 b V^2}{2(g_0 - \hat{u}(\hat{x}))^2}, \quad \hat{x} \in (0, L).$$

Перейдемо до безрозмірних величин. Позначимо

$$x = \frac{\hat{x}}{L}, \quad u(x) = \frac{\hat{u}(\hat{x})}{g_0}.$$

Тоді отримуємо напівлінійне рівняння

$$\frac{d^4 u}{dx^4} = \frac{\lambda}{(1-u(x))^2}, \quad x \in (0, 1), \quad (1)$$

де $\lambda = \frac{6\varepsilon_0 V^2 L^4}{Eh^3 g_0^3}$ – коефіцієнт, що пропорційний квадрату прикладеної напруги.

Враховуючи особливості проектування МЕМС, рівняння (1), що моделює прогин балки, доповнюють крайовими умовами, які описують спосіб закріплення кінців балки [2-4]. Розглянемо деякі з них.

1. Кінці балки жорстко закріплені (рис. 1), а отже, маємо в точках кріплення нульовий прогин і нульовий кут повороту перерізу – балка не може зазнавати у точках кріплення ні прогину, ні нахилу. Таким чином, крайові умови мають вигляд:

$$u(0) = u'(0) = 0, \quad u(1) = u'(1) = 0. \quad (2)$$



Рис. 1. Кінці балки жорстко закріплені

Такий тип є поширеним серед пристроїв МЕМС та використовується, наприклад, у комутаторах, резонаторах тощо [29-31].

2. Кінці балки шарнірно оперті (рис. 2), що означає нульовий прогин на обох кінцях, однак у точці закріплення балка може вільно обертатись. З фізичної точки зору відсутність защемлення означає, що згинальний момент на кінцях дорівнює нулю, тобто крайові умови матимуть вигляд:

$$u(0) = u''(0) = 0, \quad u(1) = u''(1) = 0. \quad (3)$$

Наведений тип закріплення кінців балки виникає, зокрема, при моделюванні термопружних V-подібних балочних актюаторів [2, 4], п'єзотермопружних резонаторів [5, 6] та термопружних мікрорезонаторів [32, 33], систем двох пружно з'єднаних мікробалок [7] тощо.



Рис. 2. Кінці балки шарнірно оперті

3. Лівий кінець балки жорстко закріплений, а правий – вільний. Це є так звана консольна балка (рис. 3). У цьому випадку на вільному кінці відсутній згинальний момент і поперечна сила, що приводить до крайових умов вигляду:

$$u(0) = u'(0) = 0, \quad u''(1) = u'''(1) = 0. \quad (4)$$

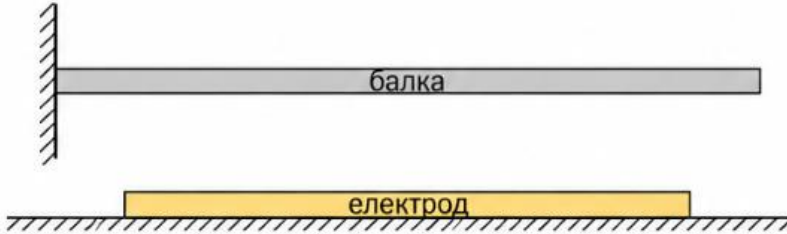


Рис. 3. Лівий кінець балки жорстко закріплений, а правий – вільний

Такий тип закріплення є одним з найпоширеніших у МЕМС-пристроях. Зокрема, консольні балки використовуються як резонансні датчики маси [8], як зонди атомно-силових мікроскопів [9], а також як електростатичні мікроактуатори у мікроперемикачах та мікропомпах [10].

4. Лівий кінець жорстко закріплений, а правий – «ковзає» (рис. 4). На ковзному кінці балка може вільно переміщуватись у поперечному напрямку, однак відсутнє обертання. З фізичної точки зору це означає нульовий кут повороту та нульову поперечну силу на цьому кінці, тоді як прогин і згинальний момент можуть бути відмінними від нуля. У такому випадку крайові умови мають вигляд:

$$u(0) = u'(0) = 0, \quad u'(1) = u'''(1) = 0. \quad (5)$$

Розглядуваний тип закріплення кінців балки реалізується у п'єзоелектричних збирачах енергії, де він забезпечує менше переміщення сейсмічної маси та вищу надійність порівняно з консольними конструкціями [11], у багатопромених збирачах енергії для автономного живлення бездротових сенсорних вузлів [12], а також у пристроях з пасивним підлаштуванням резонансної частоти до частоти зовнішніх вібрацій [13].

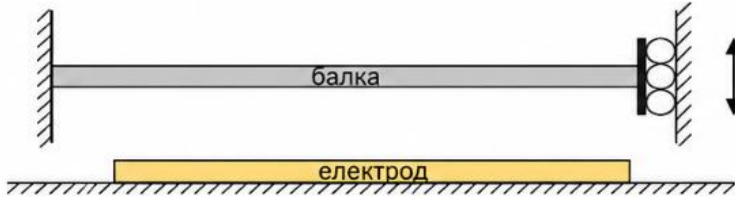


Рис. 4. Лівий кінець балки жорстко закріплений, а правий – «ковзає»

5. Лівий кінець жорстко закріплений, а правий – шарнірно опертий (рис. 5). Тоді (з огляду на викладене вище) крайові умови матимуть вигляд:

$$u(0) = u'(0) = 0, \quad u(1) = u''(1) = 0. \quad (6)$$

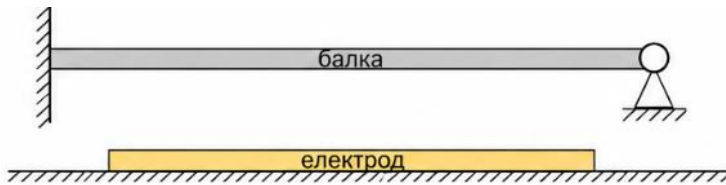


Рис. 5. Лівий кінець балки жорстко закріплений, а правий – шарнірно опертий

Розглядуваний тип закріплення кінців балки реалізується у бістабільних МЕМС-механізмах на основі попередньо стиснених балок [14]. Бістабільні мікроактюатори такого типу використовуються як мікроперемикачі, оптичні перемикачі, елементи пам'яті та збирачі енергії [15], а у МЕМС-мікродзеркалах для оптичної когерентної томографії розглядувана конфігурація застосовується для моделювання електротермального актюатора, де один кінець закріплений на підкладці, а інший шарнірно з'єднаний із рухомою платформою [16].

6. Лівий кінець шарнірно закріплений, а правий – «ковзає» (рис. 6). Тоді ми приходимо до крайових умов вигляду:

$$u(0) = u''(0) = 0, \quad u'(1) = u'''(1) = 0. \quad (7)$$

Такий тип закріплення кінців балки не є широко поширеною самостійною конструктивною схемою в МЕМС, однак має теоретичне значення – зокрема, при аналізі резонансних характеристик мікробалок під дією залишкових напружень або температурних змін [17].



Рис. 6. Лівий кінець балки шарнірно опертий, а правий – «ковзає»

Метод розв'язання. До розв'язання задачі (1) з одним із наборів крайових умов (2)-(7) застосуємо метод двобічних наближень на основі використання функції Гріна.

1. Функція Гріна для крайової задачі (1), (2) у випадку жорсткого закріплення кінців балки матиме вигляд:

$$G(x, s) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}s^3 - s^2 + \frac{1}{2}s \right) x^2 + \left(-\frac{1}{3}s^3 + \frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{6} \right) x^3, & 0 \leq x \leq s, \\ \left(\frac{1}{2}x^3 - x^2 + \frac{1}{2}x \right) s^2 + \left(-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6} \right) s^3, & s \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (8)$$

2. Функція Гріна для крайової задачі (1), (3) у випадку шарнірного обпирання закріплення кінців балки матиме вигляд:

$$G(x, s) = \begin{cases} \left(\frac{1}{6}s^3 - \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{3}s \right) x + \left(\frac{1}{6}s - \frac{1}{6} \right) x^3, & 0 \leq x \leq s, \\ \left(\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x \right) s + \left(\frac{1}{6}x - \frac{1}{6} \right) s^3, & s \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (9)$$

3. Функція Гріна для крайової задачі (1), (4) у випадку консольної балки матиме вигляд:

$$G(x, s) = \begin{cases} \frac{1}{2}sx^2 - \frac{1}{6}x^3, & 0 \leq x \leq s, \\ \frac{1}{2}xs^2 - \frac{1}{6}s^3, & s \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (10)$$

4. Функція Гріна для крайової задачі (1), (5) у випадку, коли один кінець жорстко закріплений, а інший – «ковзає», матиме вигляд:

$$G(x, s) = \begin{cases} \left(-\frac{1}{4}s^2 + \frac{1}{2}s \right) x^2 - \frac{1}{6}x^3, & 0 \leq x \leq s, \\ \left(-\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x \right) s^2 - \frac{1}{6}s^3, & s \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (11)$$

5. Функція Гріна для крайової задачі (1), (6) у випадку, коли один кінець жорстко закріплений, а другий – шарнірно опертий, матиме вигляд:

$$G(x, s) = \begin{cases} \left(\frac{1}{4}s^3 - \frac{3}{4}s^2 + \frac{1}{2}s \right) x^2 + \left(-\frac{1}{12}s^3 + \frac{1}{4}s^2 - \frac{1}{6} \right) x^3, & 0 \leq x \leq s, \\ \left(\frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x \right) s^2 + \left(-\frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{6} \right) s^3, & s \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (12)$$

6. Функція Гріна для крайової задачі (1), (7) у випадку, коли один кінець шарнірно опертий, інший – «ковзає», матиме вигляд:

$$G(x, s) = \begin{cases} \left(-\frac{1}{2}s^2 + s\right)x - \frac{1}{6}x^3, & 0 \leq x \leq s, \\ \left(-\frac{1}{2}x^2 + x\right)s - \frac{1}{6}s^3, & s \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (13)$$

Функції Гріна (8)-(13) є невід'ємними, що перевіряється безпосередньо.

Таким чином, задача (1) з одним із наборів крайових умов (2)-(7) буде еквівалентною інтегральному рівнянню Гаммерштейна

$$u(x) = \lambda \int_0^1 \frac{G(x, s)}{(1-u(s))^2} ds, \quad (14)$$

де $G(x, s)$ – відповідна функція Гріна.

Рівняння (14) розглядатимемо у банаховому просторі $C[0; 1]$ функцій, неперервних на відрізку $[0; 1]$. Норма у $C[0; 1]$ вводиться за правилом $\|u\| = \max_{x \in [0; 1]} |u(x)|$. У просторі $C[0; 1]$ виділимо конус невід'ємних функцій $\mathcal{K}_+ = \{u \in C[0; 1] : u(x) \geq 0, x \in [0; 1]\}$.

Узагальненим розв'язком крайової задачі (1) з одним із наборів крайових умов (2)-(7) називатимемо функцію $u^* \in \mathcal{K}_+$, що є розв'язком інтегрального рівняння (14).

З рівнянням (14) пов'яжемо нелінійний інтегральний оператор, що діє у $C[0; 1]$ за правилом

$$T(u)(x) = \lambda \int_0^1 \frac{G(x, s)}{(1-u(s))^2} ds. \quad (15)$$

Враховуючи останнє співвідношення, рівняння (14) набуде вигляду $u = T(u)$. Очевидно, що оператор T є додатним, тобто залишає інваріантним конус \mathcal{K}_+ .

Функція $f(x, u) = \frac{\lambda}{(1-u)^2}$ є неперервною і додатною для $x \in [0; 1]$, $0 < u < 1$, монотонно зростає за u , а отже, інтегральний оператор (15) буде ізотонним.

Для оператора T побудуємо інваріантний конусний відрізок $\langle v_0, w_0 \rangle$, який є апіорною оцінкою невідомого розв'язку u^* . Оскільки $f(0) = \lambda > 0$, то шукатимемо його у вигляді $\langle v_0, w_0 \rangle = \langle 0, \beta \rangle$, де $0 < \beta < 1$. Тоді умови, що виділяють інваріантний конусний відрізок, набувають вигляду

$$\lambda \int_0^1 G(x, s) ds \geq 0 \text{ для всіх } x \in [0; 1],$$
$$\frac{\lambda}{(1-\beta)^2} \int_0^1 G(x, s) ds \leq \beta \text{ для всіх } x \in [0; 1].$$

Оскільки функції Гріна $G(x, s)$ вигляду (8)-(13) є невід'ємними, то перша нерівність завжди виконуватиметься, а другу можемо записати у вигляді

$$\frac{\lambda M}{(1-\beta)^2} \leq \beta, \quad (16)$$

де $M = \max_{x \in [0; 1]} \int_0^1 G(x, s) ds$.

З нерівності (16) випливає, що

$$\lambda \leq \frac{4}{27M}. \quad (17)$$

Ітераційний процес сформулюємо за схемою

$$v^{(k+1)}(x) = \lambda \int_0^1 \frac{G(x, s)}{(1-v^{(k)}(s))^2} ds, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (18)$$

$$w^{(k+1)}(x) = \lambda \int_0^1 \frac{G(x, s)}{(1-w^{(k)}(s))^2} ds, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (19)$$

$$v^{(0)}(x) = v_0(x) = 0, \quad w^{(0)}(x) = w_0(x) = \beta. \quad (20)$$

Для швидшої збіжності ітерацій треба брати якомога менше значення β , тобто за β слід обрати найменший додатний корінь рівняння

$$\lambda M = \beta(1-\beta)^2. \quad (21)$$

Перевіримо, за яких умов ітераційний процес (18)-(20) двобічно збігається до єдиного на $< 0, \beta >$ додатного розв'язку задачі (1) з одним із наборів крайових умов (2)-(7).

При $0 < v, w < \beta$ має місце нерівність

$$|f(x, w) - f(x, v)| = \left| \frac{\lambda}{(1-v)^2} - \frac{\lambda}{(1-w)^2} \right| \leq L|w-v|,$$

де $L = \frac{2\lambda}{(1-\beta)^3}$.

Тоді

$$\begin{aligned} \|w^{(k+1)} - v^{(k+1)}\| &= \|T(w^{(k)}) - T(v^{(k)})\| = \max_{x \in [0; 1]} [T(w^{(k)})(x) - T(v^{(k)})(x)] = \\ &= \max_{x \in [0; 1]} \int_0^1 G(x, s) [f(s, w^{(k)}(s)) - f(s, v^{(k)}(s))] ds \leq \\ &\leq LM \max_{x \in [0; 1]} [w^{(k)}(x) - v^{(k)}(x)] = LM \|w^{(k)} - v^{(k)}\|. \end{aligned}$$

Звідси випливає, що

$$\|w^{(k+1)} - v^{(k+1)}\| \leq (LM)^{k+1} \|w^{(0)} - v^{(0)}\|.$$

Тоді рівність $v^* = w^*$ матиме місце, якщо $\gamma = LM < 1$. Таким чином, можемо сформулювати наступне твердження.

Теорема 1. Якщо $\lambda \leq \frac{4}{27M}$ і $\frac{2\lambda M}{(1-\beta)^3} < 1$, то крайова задача (1)

з одним із наборів крайових умов (2)-(7) має єдиний на $\langle 0, \beta \rangle$ додатний розв'язок $u^*(x)$, до якого двобічно збігається ітераційний процес (18)-(20).

За наближений розв'язок крайової задачі (1) з одним із наборів крайових умов (2)-(7) на k -ій ітерації приймаємо функцію

$$u^{(k)}(x) = \frac{w^{(k)}(x) + v^{(k)}(x)}{2}.$$

В такому випадку отримуємо зручну апостеріорну оцінку похибки для наближеного розв'язку

$$\|u^* - u^{(k)}\| \leq \frac{1}{2} \max_{x \in [0; 1]} (w^{(k)}(x) - v^{(k)}(x)).$$

Звідси випливає, що ітераційний процес потрібно проводити до виконання нерівності

$$\max_{x \in [0; 1]} (w^{(k)}(x) - v^{(k)}(x)) < 2\delta$$

і тоді з точністю δ можна вважати, що $u^*(x) \approx u^{(k)}(x)$.

Обчислювальний експеримент. Обчислювальний експеримент проведено для задачі (1) з кожним із наборів крайових умов (2)-(7) та наступним набором параметрів [34]

$$L = 300 \text{ мкм}, \quad b = 50 \text{ мкм}, \quad h = 3 \text{ мкм}, \quad g_0 = 2,5 \text{ мкм},$$

$$E = 160 \text{ ГПа}, \quad \varepsilon_0 = 8,8541878 \cdot 10^{-12} \frac{\Phi}{\text{м}}. \quad (22)$$

Знаходимо, що

$$\lambda = \frac{6\varepsilon_0 V^2 L^4}{Eh^3 g_0^3} = 0,006375 \cdot V^2. \quad (23)$$

Знайдемо найбільше значення прикладеної напруги, для якого виконані достатні умови збіжності методу двобічних наближень для різних типів закріплення кінців балки відповідно до Теорема 1.

З нерівності (17) та рівняння (23) отримуємо, що

$$V \leq \sqrt{\frac{4}{27M \cdot 0,006375}} = 4,820671 \cdot \sqrt{\frac{1}{M}}. \quad (24)$$

У таблиці 1 наведено значення $M = \max_{x \in (0; 1)} \int_0^1 G(x, s) ds$ для функ-

цій Гріна (8)-(13), що відповідають крайовим умовам (2)-(7), та відповідну величину V_* – найбільше значення прикладеної напруги, при якому виконана достатня умова збіжності методу двобічних наближень (права частина оцінки (24)). Тоді можемо говорити, що на інтервалі $V \in (0, V_*)$ гарантовано буде стійкий розв’язок задачі з апіорними двосторонніми оцінками похибки.

Таблиця 1

Значення M та значення прикладеної напруги V_
 для різних типів закріплення кінців балки*

Тип закріплення кінців балки	M	V_*, \mathbf{B}
Обидва кінці балки жорстко закріплені	$\frac{1}{384}$	94,465475
Обидва кінці балки шарнірно закріплені	$\frac{5}{384}$	42,246245
Лівий кінець балки жорстко закріплений, а правий – вільний	$\frac{1}{8}$	13,634917
Лівий кінець балки жорстко закріплений, а правий – «ковзає»	$\frac{1}{24}$	23,616369
Лівий кінець балки жорстко закріплений, а правий – шарнірно	$\frac{39 + 55\sqrt{33}}{65536}$	65,503318
Лівий кінець балки шарнірно закріплений, а правий – «ковзає»	$\frac{5}{24}$	10,561561

Враховуючи дані таблиці 1 можемо дійти висновку, що інтервал значень прикладеної напруги $V \in (0, V_*)$ суттєво залежить від типу закріплення кінців балки. Якісну поведінку наближених розв’язків та

фізичний зміст цієї залежності проілюструємо результатами обчислювального експерименту.

Доповнимо параметри моделі (22) значенням прикладеної до системи напруги $V = 10 \text{ В}$ та з точністю $\delta = 10^{-4}$ знайдемо наближений розв'язок задачі (1) з одним із наборів крайових умов (2)-(7).

В таблиці 2 наведено результати проведеного експерименту: для кожного з типів закріплення кінців балки наведено значення кількості виконаних ітерацій N , оцінка похибки δ та значення максимального прогину балки u_{\max} .

Таблиця 2

Кількість виконаних ітерацій N , оцінка похибки δ та значення максимального прогину балки u_{\max} для рівняння (1) для кожного з типів закріплення кінців балки (2)-(7)

Тип закріплення кінців балки	N	δ	u_{\max}
Обидва кінці балки жорстко закріплені	1	$0,28 \cdot 10^{-5}$	0,00166
Обидва кінці балки шарнірно закріплені	1	$0,71 \cdot 10^{-4}$	0,00837
Лівий кінець балки жорстко закріплений, а правий – вільний	4	$0,19 \cdot 10^{-4}$	0,09014
Лівий кінець балки жорстко закріплений, а правий – «ковзає»	2	$0,34 \cdot 10^{-4}$	0,02773
Лівий кінець балки жорстко закріплений, а правий – шарнірно	1	$0,12 \cdot 10^{-4}$	0,00346
Лівий кінець балки шарнірно закріплений, а правий – «ковзає»	7	$0,74 \cdot 10^{-4}$	0,18249

На рисунках 7-12 наведено графіки наближених розв'язків для кожного з типів закріплення кінців балки. На рисунку 13 наведено графіки наближених розв'язків для кожного з типів закріплення кінців балки (2)-(7) при однаковій прикладеній нарузі $V = 10 \text{ В}$.

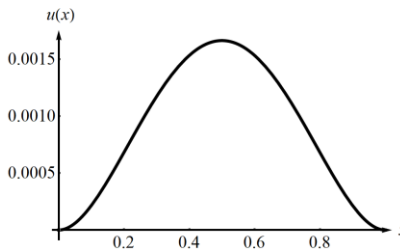


Рис. 7. Графік наближеного розв'язку для випадку, коли обидва кінці балки жорстко закріплені

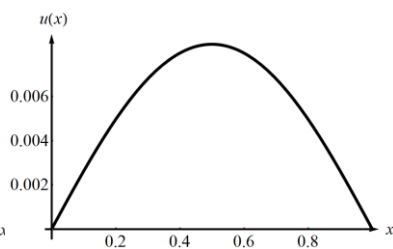


Рис. 8. Графік наближеного розв'язку для випадку, коли обидва кінці балки шарнірно закріплені

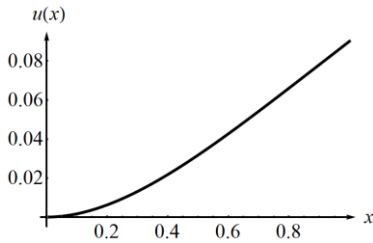


Рис. 9. Графік наближеного розв'язку для випадку, коли лівий кінець балки жорстко закріплений, а правий – вільний

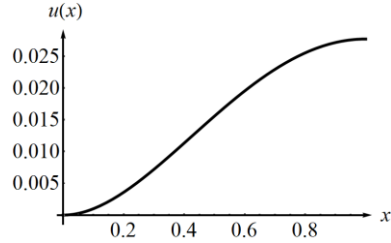


Рис. 10. Графік наближеного розв'язку для випадку, коли лівий кінець балки жорстко закріплений, а правий – «ковзає»

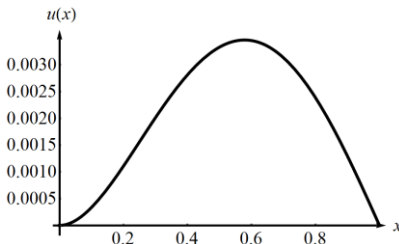


Рис. 11. Графік наближеного розв'язку для випадку, коли лівий кінець балки жорстко закріплений, а правий – шарнірно

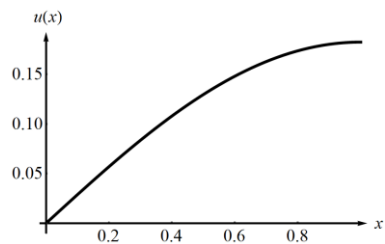


Рис. 12. Графік наближеного розв'язку для випадку, коли лівий кінець балки шарнірно закріплений, а правий – «ковзає»

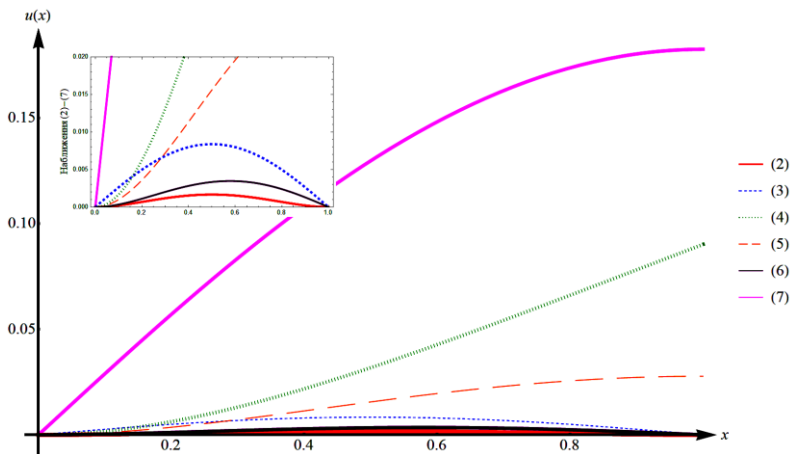


Рис. 13. Графіки наближених розв'язків для кожного з типів закріплення кінців балки (2)-(7) при однаковій прикладеній нарузі $V = 10$ В

З таблиці 1 та рисунків 7-13 бачимо, що найбільший інтервал гарантованої збіжності $V \in (0, V_*)$ відповідає конфігурації з обома жорстко закріпленими кінцями (2), для якої значення M є найменшим серед усіх розглянутих типів закріплення. В той же час найменший інтервал відповідає шарнірно-ковзному закріпленню (7) з найбільшим значенням M . Це впорядкування має цілком логічне фізичне пояснення. Оскільки величина M є максимальним безрозмірним прогином балки під дією однорічного рівномірно розподіленого навантаження, то чим менше M , тим менше балка прогинається при тому самому навантаженні, тобто тим далі від області знаходиться розв'язок при фіксованому λ . Жорстке закріплення обох кінців (2) накладає чотири крайові умови (нульовий прогин і нульовий кут повороту на кожному кінці), що максимально обмежує деформацію балки. Заміна одного кінця на шарнірний (6) або обох кінців на шарнірні (3) послаблює систему – частина зв'язків на кути повороту знімається і прогин зростає. Подальша заміна одного з кінців на ковзне (5) або вільне (4) закріплення знімає вже й умову на сам прогин у відповідному кінці, що додатково збільшує M . Найменш обмежувальна з розглянутих конфігурацій – шарнірно-ковзне закріплення (7), де частина умов знята на обох кінцях. Вона має найбільше значення M і відповідно найменше V_* .

Висновки. У роботі досліджено крайову задачу для напівлінійного диференціального рівняння четвертого порядку, що описує статичний прогин балки в мікроелектромеханічних системах під дією електростатичних сил. На відміну від попередніх досліджень, де розглядалися лише класичні умови жорсткого закріплення та шарнірного обпирання, у роботі розглянуто шість фізично значущих типів закріплення кінців балки, які відповідають основним конструктивним схемам МЕМС-пристроїв.

Для кожного з шести типів закріплення побудовано відповідну функцію Гріна. З її допомогою вихідну крайову задачу зведено до нелінійного інтегрального рівняння Гаммерштейна, яке досліджено у банаховому просторі неперервних функцій. Враховуючи додатність та ізотонність відповідного інтегрального оператора, було виділено конус невід'ємних функцій та побудовано інваріантний конусний відрізок, що дозволило отримати апіорну оцінку точного розв'язку. На цій основі теоретично обґрунтовано метод двобічних наближень: сформульовано та доведено теорему, яка встановлює умови існування і єдиності додатного розв'язку задачі на побудованому відрізку, а також гарантує двобічну збіжність ітераційного процесу.

Практичну ефективність запропонованого алгоритму підтверджено результатами обчислювального експерименту, проведеного на параметрах реального МЕМС-актюатора. На кожному кроці ітераційного процесу будуються верхні та нижні наближення, які обмежують точний розв'язок задачі, що робить отримані наближення математич-

но верифікованими. Встановлено впорядкування шести типів закріплення кінців балки за величиною безпечного робочого діапазону прикладеної напруги, що відповідає фізичному змісту про роль крайових умов: чим більше обмежень накладається на прогин і кут повороту перерізу балки, тим ширшим є робочий діапазон напруг.

Отримані результати мають безпосереднє прикладне значення для проєктування MEMS-пристроїв. По-перше, обчислені значення V_* для кожного типу закріплення кінців балки дають проєктувальнику конструктивно встановлений безпечний робочий діапазон напруг – інтервал $V \in (0, V_*)$, у межах якого гарантовані існування стійкого розв'язку та обмеженість прогину. По-друге, отримане впорядкування шести типів закріплення за величиною V_* дає кількісну основу для «вибору оптимальної конфігурації» залежно від робочих вимог пристрою. По-третє, отримані результати можуть слугувати основою для аналізу оберненої задачі проєктування – за заданою цільовою величиною прогину при робочій напрузі визначати необхідну геометрію і тип закріплення балки.

Цим визначається наукова новизна та практична значущість отриманих результатів.

Список використаних джерел:

1. Senturia S. D. *Microsystem Design*. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2001. 689 p.
2. Pelesko J. A., Bernstein D. H. *Modeling MEMS and NEMS*. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2003. 364 p.
3. Bao M. *Analysis and Design Principles of MEMS Devices*. Amsterdam: Elsevier, 2005. 328 p.
4. Koochi A., Abadyan M. *Nonlinear differential equations in micro/nano mechanics: Application in micro/nanostructures and electromechanical systems*. Amsterdam: Elsevier, 2020. 270 p.
5. Sur A., Mondal S., Das S. Size-dependent vibrations of piezo-thermoelastic microbeam using dual-scale nonlocal strain gradient and memory-dependent thermoelasticity theories. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*. 2025. Vol. 37, № 5. Article 78.
6. Mondal S., Sur A. Piezothermoelastic vibrations of microbeam resonator with memory effects. *Mechanics of Time-Dependent Materials*. 2025. Vol. 29. Article 5.
7. Ong O. Z. S., Ghayesh M. H., Hussain S. Size-dependent dynamics of double-microbeam systems with various boundary conditions via modified couple stress theory. *Microsystem Technologies*. 2021. Vol. 27, № 8. P. 3193-3210.
8. Mouro J., Pinto R., Paoletti P., Tiribilli B. Microcantilever: Dynamical Response for Mass Sensing and Fluid Characterization. *Sensors*. 2020. Vol. 21, № 1. Article 115.
9. Moosapour M., Hajabasi M. A., Ehteshami H. Thermoelastic damping effect analysis in micro flexural resonator of atomic force microscopy. *Applied Mathematical Modelling*. 2014. Vol. 38, № 11-12. P. 2716-2733.
10. Godara R. K., Sharma A. K., Joshi N., Joglekar M. M. A novel capacitive mass sensor using an open-loop controlled microcantilever. *Microsystem Technologies*. 2020. Vol. 26, № 9. P. 2977-2987.

11. Wang Z., Matova S., Elfrink R., Jambunathan M., de Nooijer C., van Schaijk R., Vullers R. J. M. A piezoelectric vibration harvester based on clamped-guided beams. *Proceedings of IEEE 25th International Conference on Micro Electro Mechanical Systems (MEMS)*. Paris, France, 2012. P. 1201-1204.
12. Saxena S., Sharma R., Pant B. D. Design and development of guided four beam cantilever type MEMS based piezoelectric energy harvester. *Microsystem Technologies*. 2017. Vol. 23. P. 1751-1759.
13. Marzencki M., Defossez M., Basroux S. MEMS vibration energy harvesting devices with passive resonance frequency adaptation capability. *IEEE Journal of Microelectromechanical Systems*. 2009. Vol. 18, №6. P. 1444-1453.
14. Tissot-Daguette L., Schneegans H., Thalmann E., Henein S. Analytical modeling and experimental validation of rotationally actuated pinned-pinned and fixed-pinned buckled beam bistable mechanisms. *Mechanism and Machine Theory*. 2022. Vol. 174. Article 104874.
15. Shi Z., Martincic E., Moulin J., Lefeuvre E., Lamarque F. Case study of a MEMS snap-through actuator: modeling and fabrication considerations. *Micromachines*. 2022. Vol. 13, №5. Article 654.
16. Mamat N., Rabenorosoa K., Clévy C., Lutz P., Xie H. Multiphysics & parallel kinematics modeling of a 3DOF MEMS mirror. *MATEC Web of Conferences*. 2015. Vol. 32. Article 01004.
17. Valle J., Fernández D., Madrenas J. Closed-form equation for natural frequencies of beams under full range of axial loads modeled with a spring-mass system. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2019. Vol. 153-154. P. 380-390.
18. Pamidighantam S., Puers R., Baert K., Tilmans H. A. C. Pull-in voltage analysis of electrostatically actuated beam structures with fixed-fixed and fixed-free end conditions. *Journal of Micromechanics and Microengineering*. 2002. Vol. 12, № 4. P. 458-464.
19. Najaf F., Nayfeh A. H., Abdel-Rahman E. M., Choura S., El-Borgi S. Nonlinear analysis of MEMS electrostatic microactuators: primary and secondary resonances of the first mode. *Journal of Vibration and Control*. 2010. Vol. 16, №9. P. 1321-1349.
20. Younis M., Abdel-Rahman E., Nayfeh A. A reduced-order model for electrically actuated microbeam-based MEMS. *Journal of Microelectromechanical Systems*. 2003. Vol. 12, №5. P. 672-680.
21. Koochi A., Kazemi A. S., Tadi Beni Y., Yekrangi A., Abadyan M. Theoretical study of the effect of Casimir attraction on the pull-in behavior of beam-type NEMS using modified Adomian method. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*. 2010. Vol. 43, № 2. P. 625-632.
22. Krasnoselskii M. A. Positive solutions of operator equations. Groningen: P. Noordhoff, 1964. 379 p.
23. Опојцев В. И., Хуродзе Т. А. Нелинейные операторы в пространствах с конусом. Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1984. 246 с.
24. Konchakovska O., Sidorov M. Numerical Analysis of the One-Dimensional Nonlinear Boundary Value Problem that Modeling an Electrostatic NEMS by Two-Sided Approximations Method. *Journal of Numerical Analysis, Industrial and Applied Mathematics (JNAIAM)*. 2020. Vol. 14, № 3-4. P. 17-26.
25. Кончаковська О. С., Сидоров М. В. Двобічний ітераційний метод на основі використання функції Гріна в задачах чисельного аналізу деяких електромеханічних систем. *Вісник ХНУ ім. В. Н. Каразіна. Сер. Математичне мо-*

- делювання. *Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління*. 2022. № 55. С. 19-31.
26. Савченко А. В., Гвоздев М. І. Застосування методу двобічних наближень до аналізу статичного прогину пружної балки з різними типами закріплення кінців в моделі мікроелектромеханічної системи. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки*. 2025. № 28. С. 93-106.
 27. Timoshenko S. P., Goodier J. N. *Theory of Elasticity*. New York: McGraw-Hill, 1970. 567 p.
 28. Younis M. I. *MEMS Linear and Nonlinear Statics and Dynamics*. New York: Springer, 2011. 453 p.
 29. Jaber N., Ramini A., Younis M. I. Multifrequency excitation of a clamped–clamped microbeam. *Microsystems & Nanoengineering*. 2016. Vol. 2. Article 16002.
 30. Alneamy A. M. Nonlinear dynamic analysis of an electrostatically actuated clamped–clamped beam and excited at the primary and secondary resonances. *Micromachines*. 2023. Vol. 14, № 10. Article 1972.
 31. Kumar P., Inamdar M. M., Pawaskar D. N. Characterisation of the internal resonances of a clamped-clamped beam MEMS resonator. *Microsystem Technologies*. 2020. Vol. 26, № 6. P. 1987-2003.
 32. Sun Y., Fang D., Soh A. K. Thermoelastic damping in micro-beam resonators. *International Journal of Solids and Structures*. 2006. Vol. 43, № 10. P. 3213-3229.
 33. Kumar H., Mukhopadhyay S. Thermoelastic damping analysis in microbeam resonators based on Moore–Gibson–Thompson generalized thermoelasticity theory. *Acta Mechanica*. 2020. Vol. 231, № 7. P. 3003-3015.
 34. Senthil Kumar P. K., Elavarasi R., Eladi P. B., Gopikrishnan M. Pull-in voltage study of various structured cantilever and fixed-fixed beam models using COMSOL Multiphysics. *Indian Journal of Science and Technology*. 2015. Vol. 8, №14. P. 1-9.

References:

1. Senturia S. D. *Microsystem Design*. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2001. 689 p.
2. Pelesko J. A., Bernstein D. H. *Modeling MEMS and NEMS*. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2003. 364 p.
3. Bao M. *Analysis and Design Principles of MEMS Devices*. Amsterdam: Elsevier, 2005. 328 p.
4. Koochi A., Abadyan M. *Nonlinear differential equations in micro/nano mechanics: Application in micro/nanostructures and electromechanical systems*. Amsterdam: Elsevier, 2020. 270 p.
5. Sur A., Mondal S., Das S. Size-dependent vibrations of piezo-thermoelastic microbeam using dual-scale nonlocal strain gradient and memory-dependent thermoelasticity theories. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*. 2025. Vol. 37, № 5. Article 78.
6. Mondal S., Sur A. Piezothermoelastic vibrations of microbeam resonator with memory effects. *Mechanics of Time-Dependent Materials*. 2025. Vol. 29. Article 5.
7. Ong O. Z. S., Ghayesh M. H., Hussain S. Size-dependent dynamics of double-microbeam systems with various boundary conditions via modified couple stress theory. *Microsystem Technologies*. 2021. Vol. 27, № 8. P. 3193-3210.

8. Mouro J., Pinto R., Paoletti P., Tiribilli B. Microcantilever: Dynamical Response for Mass Sensing and Fluid Characterization. *Sensors*. 2020. Vol. 21, № 1. Article 115.
9. Moosapour M., Hajabasi M. A., Ehteshami H. Thermoelastic damping effect analysis in micro flexural resonator of atomic force microscopy. *Applied Mathematical Modelling*. 2014. Vol. 38, № 11-12. P. 2716-2733.
10. Godara R. K., Sharma A. K., Joshi N., Joglekar M. M. A novel capacitive mass sensor using an open-loop controlled microcantilever. *Microsystem Technologies*. 2020. Vol. 26, № 9. P. 2977-2987.
11. Wang Z., Matova S., Elfrink R., Jambunathan M., de Nooijer C., van Schaijk R., Vullers R. J. M. A piezoelectric vibration harvester based on clamped-guided beams. Proceedings of IEEE 25th International Conference on Micro Electro Mechanical Systems (MEMS). Paris, France, 2012. P. 1201-1204.
12. Saxena S., Sharma R., Pant B. D. Design and development of guided four beam cantilever type MEMS based piezoelectric energy harvester. *Microsystem Technologies*. 2017. Vol. 23. P. 1751-1759.
13. Marzencki M., Defosseux M., Basroux S. MEMS vibration energy harvesting devices with passive resonance frequency adaptation capability. *IEEE Journal of Microelectromechanical Systems*. 2009. Vol. 18, №6. P. 1444-1453.
14. Tissot-Daguette L., Schneegans H., Thalmann E., Henein S. Analytical modeling and experimental validation of rotationally actuated pinned–pinned and fixed–pinned buckled beam bistable mechanisms. *Mechanism and Machine Theory*. 2022. Vol. 174. Article 104874.
15. Shi Z., Martincic E., Moulin J., Lefeuvre E., Lamarque F. Case study of a MEMS snap-through actuator: modeling and fabrication considerations. *Micromachines*. 2022. Vol. 13, №5. Article 654.
16. Mamat N., Rabenorosoa K., Clévy C., Lutz P., Xie H. Multiphysics & parallel kinematics modeling of a 3DOF MEMS mirror. *MATEC Web of Conferences*. 2015. Vol. 32. Article 01004.
17. Valle J., Fernández D., Madrenas J. Closed-form equation for natural frequencies of beams under full range of axial loads modeled with a spring-mass system. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2019. Vol. 153-154. P. 380-390.
18. Pamidighantam S., Puers R., Baert K., Tilmans H. A. C. Pull-in voltage analysis of electrostatically actuated beam structures with fixed-fixed and fixed-free end conditions. *Journal of Micromechanics and Microengineering*. 2002. Vol. 12, № 4. P. 458-464.
19. Najjar F., Nayfeh A. H., Abdel-Rahman E. M., Choura S., El-Borgi S. Nonlinear analysis of MEMS electrostatic microactuators: primary and secondary resonances of the first mode. *Journal of Vibration and Control*. 2010. Vol. 16, № 9. P. 1321-1349.
20. Younis M., Abdel-Rahman E., Nayfeh A. A reduced-order model for electrically actuated microbeam-based MEMS. *Journal of Microelectromechanical Systems*. 2003. Vol. 12, №5. P. 672-680.
21. Koochi A., Kazemi A. S., Tadi Beni Y., Yekrangi A., Abadyan M. Theoretical study of the effect of Casimir attraction on the pull-in behavior of beam-type NEMS using modified Adomian method. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*. 2010. Vol. 43, № 2. P. 625-632.

22. Krasnoselskii M. A. Positive solutions of operator equations. Groningen: P. Noordhoff, 1964. 379 p.
23. Opoitsev V. Y., Khurodze T. A. Nelyneinye operatory v prostranstvakh s konusom. Tbylysy: Yzd-vo Tbylys. un-ta, 1984. 246 p.
24. Konchakovska O., Sidorov M. Numerical Analysis of the One-Dimensional Nonlinear Boundary Value Problem that Modeling an Electrostatic NEMS by Two-Sided Approximations Method. *Journal of Numerical Analysis, Industrial and Applied Mathematics (JNAIAM)*. 2020. Vol. 14, № 3-4. P. 17–26.
25. Konchakovska O. S., Sydorov M. V. Dvobichnyi iteratsiynyi metod na osnovi vykorystannia funktsii Hrina v zadachakh chyselnoho analizu deiakykh elektromekhanichnykh system. *Visnyk KhNU im. V. N. Karazina. Ser. Matematychna modeliuвання. Informatsiini tekhnolohii. Avtomatyzyvani systemy upravlinnia*. 2022. № 55. P. 19-31.
26. Savchenko A. V., Hvozdiev M. I. Zastosuvannia metodu dvobichnykh nablyzhen do analizu statychnoho prohynu pruzhnoi balky z riznymy typamy zakriplennia kintsiv v modeli mikroelektromekhanichnoi systemy. *Matematychna ta kompiuterne modeliuвання. Seriya: Fyzyko-matematychni nauky*. 2025. № 28. P. 93-106.
27. Timoshenko S. P., Goodier J. N. Theory of Elasticity. New York: McGraw-Hill, 1970. 567 p.
28. Younis M. I. MEMS Linear and Nonlinear Statics and Dynamics. New York: Springer, 2011. 453 p.
29. Jaber N., Ramini A., Younis M. I. Multifrequency excitation of a clamped–clamped microbeam. *Microsystems & Nanoengineering*. 2016. Vol. 2. Article 16002.
30. Alneamy A. M. Nonlinear dynamic analysis of an electrostatically actuated clamped–clamped beam and excited at the primary and secondary resonances. *Micromachines*. 2023. Vol. 14, № 10. Article 1972.
31. Kumar P., Inamdar M. M., Pawaskar D. N. Characterisation of the internal resonances of a clamped-clamped beam MEMS resonator. *Microsystem Technologies*. 2020. Vol. 26, № 6. P. 1987-2003.
32. Sun Y., Fang D., Soh A. K. Thermoelastic damping in micro-beam resonators. *International Journal of Solids and Structures*. 2006. Vol. 43, № 10. P. 3213-3229.
33. Kumar H., Mukhopadhyay S. Thermoelastic damping analysis in microbeam resonators based on Moore–Gibson–Thompson generalized thermoelasticity theory. *Acta Mechanica*. 2020. Vol. 231, № 7. P. 3003-3015.
34. Senthil Kumar P. K., Elavarasi R., Eladi P. B., Gopikrishnan M. Pull-in voltage study of various structured cantilever and fixed-fixed beam models using COMSOL Multiphysics. *Indian Journal of Science and Technology*. 2015. Vol. 8, №14. P. 1-9.

APPLICATION OF THE METHOD OF TWO-SIDED APPROXIMATIONS TO THE ANALYSIS OF THE INFLUENCE OF BEAM END CONDITIONS ON THE STATIC DEFLECTION OF A BEAM IN MICROELECTROMECHANICAL SYSTEMS

The article investigates the boundary value problem for a semilinear fourth-order differential equation that describes the static deflection of a

beam in microelectromechanical systems (MEMS). Unlike previous studies, in which only the classical conditions of clamped ends and simple support were considered, six types of boundary conditions are investigated in this paper: clamped-clamped, simply supported (pinned-pinned), clamped-free (cantilever), clamped-sliding (clamped-guided), clamped-pinned, and pinned-sliding (pinned-guided) end conditions of the beam. The considered configurations cover the main design schemes of modern MEMS devices – from microswitches and resonators to atomic force microscopy probes, micromirrors, and piezoelectric energy harvesters.

To investigate this problem, the method of two-sided approximations in a semi-ordered Banach space of continuous functions is applied. The original boundary value problem is reduced to a nonlinear Hammerstein integral equation with an isotone operator, the kernel of which is the corresponding Green's function. For each of the six types of beam end conditions, the Green's function is constructed, and the maximum dimensionless deflection of the beam under a unit uniformly distributed load is calculated. Based on the isotone property of the integral operator, an invariant cone segment is constructed, and a theorem on the existence and uniqueness of a positive solution to the boundary value problem is formulated, to which the iterative process converges in a two-sided manner.

A computational experiment is conducted using the parameter values of a real MEMS actuator. For each type of end condition, the largest value of the applied voltage at which the sufficient conditions for the convergence of the method are satisfied is calculated, and approximate solutions are constructed. An ordering of the six types of beam end conditions with respect to this voltage value is established, which provides a quantitative basis for selecting the optimal type of beam end condition when designing MEMS devices with different operating characteristics.

The novelty of the work lies in developing the method of two-sided approximations for application to boundary value problems with a set of six physically significant types of boundary conditions. This makes it possible to obtain, for each configuration, verified approximations of the deflection with a priori two-sided estimates within the constructively established safe operating range of the applied voltage. The obtained results can be directly applied in the design of microswitches, microresonators, sensors, micromirrors, and piezoelectric microactuators. The developed scheme of the method can be extended to generalizations of the model – variable dielectric permittivity, partial electrostatic loading, nonlinearities of other types, as well as (in combination with the Rothe method) to the non-stationary case.

Key words: *beam, clamped support, isotone operator, invariant cone segment, cantilever beam, boundary value problem, beam boundary conditions, mathematical modeling, method of two-sided approximations, microelectromechanical system, deflection, Hammerstein's equation, Green's function, numerical methods, simply supported beam.*