УДК 004.42:510.69

*О.С. Шкільняк, В.С. Касьянюк, Л.М. Малютенко*

# КОМПОЗИЦІЙНО-НОМІНАТИВНІ МОДАЛЬНІ ЛОГІКИ НЕМОНОТОННИХ ЧАСТКОВИХ ПРЕДИКАТІВ ТА ЇХ ЧИСЛЕННЯ

Досліджено нові програмно-орієнтовані логічні формалізми модального типу – композиційно-номінативні модальні логіки немонотонних часткових предикатів. Описано семантичні моделі та мови цих логік, розглянуто основні семантичні властивості. Введено відношення наслідку для формул у стані, описано властивості відношення логічного наслідку для множин специфікованих станами формул. На цій основі для загальних і темпоральних модальних логік немонотонних предикатів побудовано числення секвенційного типу. Описано різновиди цих числень, для них доведено теореми коректності й повноти.

Ключові слова: модальна логіка, частковий предикат, логічний наслідок, секвенційне числення.

## Вступ

Для моделювання предметних областей та опису інформаційних і програмних систем успішно використовуються модальні логіки, в першу чергу темпоральні та епістемічні. Апарат темпоральних логік застосовується для моделювання динамічних систем, специфікації та верифікації програм. Для опису експертних систем, баз даних і баз знань використовуються епістемічні логіки. Традиційні модальні логіки базуються на класичній логіці предикатів. Проте класична логіка має [1] принципові обмеження, вона недостатньо враховує частковість та неповноту інформації про предметну область. Тому набуває актуальності проблема побудови нових, програмно-орієнтованих логічних формалізмів модального типу. Такими є композиційно-номінативні модальні логіки (КНМЛ), які поєднують можливості традиційних модальних логік [2] і композиційно-номінативних логік [1, 3] часткових квазіарних предикатів. Низку класів КНМЛ побудовано і досліджено, зокрема, в [4–6]. Транзиційні модальні логіки (ТМЛ) відбивають аспект зміни й розвитку предметних областей, описуючи переходи від одного стану світу до іншого, вони є найважливішим класом КНМЛ. В межах ТМЛ природним чином розглядаються традиційні модальні логіки. Підкласами ТМЛ є темпоральні (ТмМЛ) та мультимодальні (ММЛ) логіки, в межах ММЛ далі виділено ТМЛ епістемічного типу та загальні ТМЛ (ЗМЛ).

Метою даної роботи є дослідження чистих першопорядкових ТМЛ часткових квазіарних предикатів без обмеження монотонності. ТМЛ немонотонних предикатів запропоновано в [7], вони вивчались в [8, 9]. В даній статті розглянуто семантичні й синтаксичні аспекти ТМЛ немонотонних предикатів. Описано відношення логічного наслідку для множин специфікованих станами формул, на цій основі для ЗМЛ та ТмМЛ немонотонних предикатів побудовано числення секвенційного типу. Отримано різновиди цих числень залежно від властивостей відношень переходу на станах світу, для таких числень доведено теореми коректності й повноти.

Поняття, які в цій роботі не визначаються, тлумачимо в сенсі [1, 3, 8].

## 1. Транзиційні модальні системи та їх різновиди

Центральним для КНМЛ є поняття композиційно-номінативної модальної системи (КНМС). КНМС – це об’єкт вигляду $M = (Cms, Fm, Im)$, де $Cms = (S, R, Pr, C)$ – композиційна модальна система, вона задає семантичні аспекти світу, $Fm$ – множина формул мови КНМЛ, $Im$ – відображення інтерпретації формул, $S$ – множина станів світу, $R$ – множина відношень на $S$,

$Pr$ – множина предикатів на станах, $C$ – множина композицій на $Pr$.

Найважливішим класом КНМС є транзиційні модальні системи (ТМС). У випадку ТМС $R$ складається з відношень вигляду $\mathrm{R} \subseteq S \times S$, трактуємо їх як відношення переходу на станах. Для чистих першопорядкових ТМС $S$ – це множина алгебраїчних систем вигляду $\alpha = (A_\alpha, Pr_\alpha)$, $C$ задається базовими загальнологічними композиціями і базовими модальними композиціями, $A_\alpha$ – множина базових даних стану $\alpha$, $Pr_\alpha$ – множина квазіарних предикатів вигляду ${}^V A_\alpha \to \{T, F\}$, це предикати стану $\alpha$. Предикати вигляду ${}^V A \to \{T, F\}$, де $A = \bigcup\limits_{\alpha \in S} A_\alpha$, назвемо глобальними.

Базовими загальнологічними композиціями вважаємо логічні зв'язки $\neg$ та $\vee$, композиції реномінації $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$ та квантифікації $\exists x$. Логічні зв'язки $\to$, &, $\leftrightarrow$ є похідними, вони виражаються $\neg$ та $\vee$; композиції квантифікації $\forall x$ виражаються $\neg$ та $\exists x$ (див. [1, 3]).

*Мультимодальні* ТМС (ММС) – це ТМС із $R = \{\rhd_i \mid i \in I\}$ та базовими модаль ними композиціями $\mathrm{K}_i$, $i \in I$, де кожному $\rhd_i \in R$ зіставлено відповідну $\mathrm{K}_i$.

*Загальні* ТМС (ЗМС) є окремим випадком ММС, у них $R = \{\rhd\}$ та єдина базова модальна композиція $\Box$ (необхідно).

ТМС, у яких $R = \{\rhd\}$, а базовими модальними композиціями є $\Box\uparrow$ (завжди буде) та $\Box\downarrow$ (завжди було), називають *темпоральними* (ТмМС).

Для загальних ТМС задають похідну композицію $\Diamond$ (можливо): $\Diamond P$ означає $\neg\Box\neg P$. Для ТмМС задають похідні композиції $\Diamond\uparrow$ (колись буде) і $\Diamond\downarrow$ (колись було): $\Diamond\uparrow P$ означає $\neg\Box\uparrow\neg P$, $\Diamond\downarrow P$ означає $\neg\Box\downarrow\neg P$.

Далі обмежимось розглядом ЗМС та ТмМС, в першу чергу зосереджуючись на ЗМС. Отримані результати природним чином переносяться на випадок ММС.

Опишемо мови чистих першопорядкових ТМС. Алфавіт мови: множини $V$ предметних імен (змінних) та $Ps$ предикатних символів (сигнатура мови); символи базових загальнологічних композицій $\neg$, $\vee$, $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}$, $\exists x$; множина $Ms$ символів базових модальних композицій (модальна сигнатура).

У випадку ЗМС $Ms = \{\Box\}$, у випадку ТмМС $Ms = \{\Box\uparrow, \Box\downarrow\}$.

В мовах ЗМС множина $Fm$ формул визначається так. Маємо $Ps \subseteq Fm$, такі формули атомарні; далі задаємо: $\Phi, \Psi \in Fm \Rightarrow$
$\Rightarrow \neg\Phi, \vee\Phi\Psi,\ R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Phi, \exists x\Phi, \Box\Phi \in Fm$.

В мовах ТмМС множину $Fm$ задаємо так. Маємо $Ps \subseteq Fm$, а далі: $\Phi, \Psi \in Fm \Rightarrow$
$\Rightarrow \neg\Phi, \vee\Phi\Psi, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Phi, \exists x\Phi, \Box\uparrow\Phi, \Box\downarrow\Phi \in Fm$.

При запису формул будемо вживати (див. [1]) символи похідних композицій $\to$, &, $\leftrightarrow$, $\forall x$. Наприклад, $\forall x\Phi$ означає $\neg\exists x\neg\Phi$.

*Тип* ТМС визначається сигнатурою мови та сигнатурою неістотності. Таку сигнатуру задаємо за допомогою тотальної функції $\nu : Ps \to 2^V$, яку (див. [1]) продовжуємо до $\nu : Fr \to 2^V$.

Атомарні формули та формули вигляду $R_{\bar{x}}^{\bar{v}} p$, де $p \in Ps$ та $\nu(p) \cap \{\bar{v}\} = \varnothing$, назвемо примітивними. Формули вигляду $R_{\bar{y}}^{\bar{x}}(\Phi)$ назвемо $R$-формулами.

Визначимо відображення інтерпретації формул на станах. Спочатку задаємо $Im : Ps \times S \to Pr$, при цьому має бути $Im(p, \alpha) \in Pr_\alpha$ (базові предикати є предикатами станів). Продовжимо $Im$ до відображення $Im : Fm \times S \to Pr$ так:

$$Im(\neg\Phi, \alpha) = \neg(Im(\Phi, \alpha));$$

$$Im(\vee\Phi\Psi, \alpha) = \vee(Im(\Phi, \alpha), Im(\Psi, \alpha));$$

$$Im(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Phi, \alpha) = \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(Im(\Phi, \alpha));$$

$$Im(\exists x\Phi, \alpha)(d) =$$

$$= \begin{cases} T, & \text{якщо існує } a \in A_\alpha : \ Im(\Phi, \alpha)(d \nabla x \mapsto a) = T, \\ F, & \text{якщо } Im(\Phi, \alpha)(d \nabla x \mapsto a) = F \ \text{для всіх } a \in A_\alpha, \\ & \text{невизначене в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

$$Im(\Box\Phi, \alpha)(d) =$$

$$= \begin{cases} T, \text{ якщо } Im(\Phi,\delta)(d) = T \text{ для всіх } \delta \in S: \ \alpha \triangleright \delta, \\ F, \text{ якщо існує } \delta \in S: \ \alpha \triangleright \delta \text{ та } Im(\Phi,\delta)(d) = F, \\ \quad \text{невизначене в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

Якщо для $\alpha \in S$ не існує $\beta$: $\alpha \triangleright \beta$, то $Im(\Box\Phi, \alpha)(d)\uparrow$ для кожного $d \in {}^V\!A$.

У випадку ТмМС для формул вигляду $\Box{\uparrow}\Phi$ та $\Box{\downarrow}\Phi$ маємо:

$Im(\Box{\uparrow}\Phi, \alpha)(d) =$

$$= \begin{cases} T, \text{ якщо } Im(\Phi,\delta)(d) = T \text{ для всіх } \delta \in S: \ \alpha \triangleright \delta, \\ F, \text{ якщо існує } \delta \in S: \ \alpha \triangleright \delta \text{ та } Im(\Phi,\delta)(d) = F, \\ \quad \text{невизначене в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

Якщо для $\alpha \in S$ не існує $\beta$: $\alpha \triangleright \beta$, то $Im(\Box{\uparrow}\Phi, \alpha)(d)\uparrow$ для кожного $d \in {}^V$.

$Im(\Box{\downarrow}\Phi, \alpha)(d) =$

$$= \begin{cases} T, \text{ якщо } Im(\Phi,\delta)(d) = T \text{ для всіх } \delta \in S: \ \delta \triangleright \alpha, \\ F, \text{ якщо існує } \delta \in S: \ \delta \triangleright \alpha \text{ та } Im(\Phi,\delta)(d) = F, \\ \quad \text{невизначене в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

Якщо для $\alpha \in S$ не існує $\beta$: $\beta \triangleright \alpha$, то $Im(\Box{\downarrow}\Phi, \alpha)(d)\uparrow$ для кожного $d \in {}^V\!A$.

Предикати, які є значеннями немодалізованих формул (при їх побудові не використовуємо символи модальних композицій $\Box$), належать до предикатів станів.

Предикат $Im(\Phi, \alpha)$, який є значенням формули $\Phi$ у стані $\alpha$, позначаємо $\Phi_\alpha$.

Формула $\Phi$ *неспростовна* (частково істинна) *в ТМС M* (позн. $M \models \Phi$), якщо $\Phi_\alpha$ неспростовний для всіх $\alpha \in S$.

Формула $\Phi$ *неспростовна*, або *частково істинна* (позн. $M \models \Phi$), якщо $M \models \Phi$ для всіх ТМС $M$ одного типу.

ТМС будемо також подавати у вигляді $M = (S, R, A, Im)$.

Залежно від умов, накладених на відношення переходу $\triangleright$, можна визначати різні класи ТМС. Традиційними є випадки, коли $\triangleright$ рефлексивне, симетричне чи транзитивне. Якщо $\triangleright$ рефлексивне, то до назви ТМС додаємо *R*; якщо транзитивне, то додаємо *T*; якщо симетричне, то додаємо *S*. Отримуємо такі типи ЗМС та ТмМС:

*R*-ЗМС, *T*-ЗМС, *S*-ЗМС, *RT*-ЗМС, *RS*-ЗМС, *TS*-ЗМС, *RTS*-ЗМС;

*R*-ТмМС, *T*-ТмМС, *S*-ТмМС, *RT*-ТмМС, *RS*-ТмМС, *TS*-ТмМС, *RTS*-ТмМС.

Якщо $\triangleright$ симетричне, завжди маємо $Im(\Box{\uparrow}\Phi, \alpha)(d) = Im(\Box{\downarrow}\Phi, \alpha)(d)$. Це означає, що дія композицій $\Box{\uparrow}$ та $\Box{\downarrow}$ ідентична, це фактично композиція $\Box$. Отже, якщо $\triangleright$ симетричне, то типи *S*-ТмМС, *RS*-ТмМС, *TS*-ТмМС, *RTS*-ТмМС цілком ідентичні типам *S*-ЗМС, *RS*-ЗМС, *TS*-ЗМС, *RTS*-ЗМС.

## 2. Семантичні властивості ТМЛ

Стисло опишемо основні семантичні властивості ТМЛ.

**Теорема 1.** Композиції $\Box$, $\Box{\uparrow}$ та $\Box{\downarrow}$ зберігають еквітонність (монотонність).

Наведемо доведення для $\Box$, для $\Box{\uparrow}$ та $\Box{\downarrow}$ доведення аналогічне.

Нехай $\Phi_\alpha$ еквітонний і для кожного $\beta$ такого, що $\alpha \triangleright \beta$, предикат $\Phi_\beta$ еквітонний. Нехай $d, d' \in {}^V\!A$, $d \subseteq d'$, $\Box\Phi_\alpha(d)\downarrow$.

Нехай $\Box\Phi_\alpha(d) = F$. Тоді для деякого $\beta$ такого, що $\alpha \triangleright \beta$, маємо $\Phi_\beta(d) = F$. Однак $d \subseteq d'$, тому за еквітонністю $\Phi_\beta$ маємо $\Phi_\beta(d') = F$, звідки $(\Box\Phi)_\alpha(d') = F$.

Нехай $\Box\Phi_\alpha(d) = T$. Тоді для кожного $\gamma$ такого, що $\alpha \triangleright \gamma$, маємо $\Phi_\gamma(d) = T$. Згідно $d \subseteq d'$ для кожного такого $\gamma$ за еквітонністю $\Phi_\gamma$ тоді $\Phi_\gamma(d') = T$, тому $\Box\Phi_\alpha(d') = T$.

Таким чином, $\Box\Phi_\alpha$ еквітонний.

Композиції $\neg$, $\vee$, $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}$, $\exists x$ зберігають [1] еквітонність. Звідси такий наслідок.

**Наслідок 1.** Базові композиції ЗМС та ТмМС зберігають еквітонність.

Властивості композицій реномінації R, RI, RU, RR, R$\neg$, R$\vee$, R$\exists$R (див. [3]), в яких мовиться про рівність предикатів, справджуються для предикатів ТМС.

На формули ТМЛ переноситься відоме [3] поняття *Rs-Un*-еквівалентності. Для визначення цього поняття, а також для елімінації кванторів використовують [3] спеціальні предикати-індикатори *Ez*, які визначають наявність в даних компоненти з іменем $z \in V$. Предикати *Ez* задаємо так: $E(z) = T$, якщо $d(z)\downarrow$; $E(z) = F$, якщо $d(z)\uparrow$.

*Rs-формою* $R$-формули $R^{\bar{x},\bar{u},\bar{v}}_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(\Phi)$, де $\{\bar{u}\} \subseteq \nu(\Phi)$, назвемо $R$-формулу $R^{\bar{v}}_{\bar{z}}(\Phi)$, утворену із $R^{\bar{x},\bar{u},\bar{v}}_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(\Phi)$ всеможливими спрощеннями реномінації на основі властивостей R, RI, RU, R∃R (застосування R дає $Rs$-форму Φ, яка може не бути $R$-формулою).

Нехай $Un \subseteq V$ – множина імен, трактованих як неозначені ($Un$ задаємо за допомогою предикатів-індикаторів $Ez$), а символ $\varepsilon \notin V$ позначає відсутність значення.

Нехай $R$-формула $R^{\bar{r},\bar{x},\bar{u}}_{\bar{s},\bar{y},\bar{v}}\Phi$ така: $\{\bar{r},\bar{s},\bar{y}\} \subseteq Un, \{\bar{x},\bar{v}\} \cap Un = \varnothing$. *Un-форма* формули $R^{\bar{r},\bar{x},\bar{u}}_{\bar{s},\bar{y},\bar{v}}\Phi$ – це вираз $R^{\bar{x},\bar{u}}_{\bar{\varepsilon},\bar{v}}\Phi$.

$R$-формули Ψ та Ξ назвемо $Rs$-$Un$-еквівалентними (позн $\Psi \sim_{Un} \Xi$), якщо Ψ та Ξ мають однакові $Rs$-форми або ці $Rs$-форми мають однакові $Un$-форми.

Якщо $R$-формули Ψ та Ξ – $Rs$-$Un$-еквівалентні, то ¬Ψ та ¬Ξ теж будемо називати $Rs$-$Un$-еквівалентними. Вважаємо, що для формули Ψ, яка не є $R$-формулою чи запереченням $R$-формули, її $Un$-форма збігається із Ψ. Таким чином, кожна формула $Rs$-$Un$-еквівалентна сама собі.

Нехай $M = (St, R, A, Im)$ – ТМС. Нехай $Un_\alpha \subseteq V$ – множина імен, трактованих як неозначені в стані $\alpha \in St$.

**Теорема 2.** Якщо $\Phi \sim_{Un_\alpha} \Psi$, то для всіх $d \in^{V \setminus Un_\alpha} A$ маємо $\Psi_\alpha(d) = \Xi_\alpha(d)$.

Зауважимо, що $d \in^{V \setminus Un_\alpha} A$ означає: $Eu(d) = F$ для всіх $u \in Un_\alpha$.

Розглянемо взаємодію в ТМС модальних композицій із реномінаціями і кванторами. Обмежимось випадком ЗМС.

Символи модальних композицій можна проносити [7] через реномінації.

**Теорема 3.** $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}\Box\Phi_\alpha(d) = \Box R^{\bar{v}}_{\bar{x}}\Phi_\alpha(d)$ для довільних Φ, $\alpha \in St$, $d \in^V A$.

Звідси випливає: кожна формула вигляду $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Box\Phi) \leftrightarrow \Box R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)$ неспростовна.

Розглянемо взаємодію модальних композицій та кванторів.

Для ЗМЛ еквітонних предикатів формули $\Box\forall x\Phi \to \forall x\Box\Phi$ та $\exists x\Box\Phi \to \Box\exists x\Phi$ є неспростовними (див. [1, 7]). Це не так для загального випадку нееквітонних (немонотонних) предикатів, для цих формул в [7] побудовані контрмоделі – ЗМС, в яких ці формули спростовні.

**Приклад 1**. $\Box\forall x\Phi \to \forall x\Box\Phi$ та $\exists x\Box\Phi \to \Box\exists x\Phi$ – спростовні формули.

Побудуємо ЗМС, в якій спростовується $\Box\forall x\Phi \to \forall x\Box\Phi$. Нехай $St = \{\alpha, \beta\}$, $R = \{\alpha \rhd \beta\}$, $A_\alpha = \{a\}$, $A_\beta = \{b\}$. Нехай для $p \in Ps$ неістотні усі імена, окрім $x$. Задамо $p_\alpha(\varnothing) = F$, $p_\beta(\varnothing) = F$, $p_\beta([x \mapsto b]) = T$. Тоді $\forall x p_\beta(\varnothing) = T$, звідки $\Box\forall x p_\alpha(\varnothing) = T$. Маємо $p_\beta([x \mapsto a]) = p_\beta([x \mapsto a]_\beta) = p_\beta(\varnothing) = F$, адже $[x \mapsto a]_\beta = \varnothing$, звідки $\Box p_\alpha([x \mapsto a]) = F$, тому $\forall x\Box p_\alpha(\varnothing) = F$.

Отримали $(\Box\forall xp \to \forall x\Box p)_\alpha(\varnothing) = F$, що дає $\alpha \not\models \Box\forall xp \to \forall x\Box p$.

Побудуємо ЗМС, в якій спростовується $\exists x\Box\Phi \to \Box\exists x\Phi$. Нехай $St = \{\alpha, \beta\}$, $R = \{\alpha \rhd \beta\}$, $A_\alpha = \{a, b\}$, $A_\beta = \{b\}$. Нехай для $p \in Ps$ неістотні усі імена, окрім $x, y$. Задамо $p_\beta([y \mapsto b]) = T$, $p_\beta([x \mapsto b, y \mapsto b]) = F$. Згідно $A_\beta = \{b\}$ із $p_\beta([x \mapsto b, y \mapsto b]) = F$ маємо $\exists x p_\beta([y \mapsto b]) = F$, звідки випливає, що $\Box\exists x p_\alpha([y \mapsto b]) = F$. Із $p_\beta([y \mapsto b]) = T$ маємо $\Box p_\alpha([x \mapsto a, y \mapsto b]) = T$, звідки отримуємо $\exists x\Box p_\alpha([y \mapsto b]) = T$.

Отже, $(\exists x\Box p \to \Box\exists xp)_\alpha([y \mapsto b]) = F$, звідки $\alpha \not\models \exists x\Box p \to \Box\exists xp$.

Зауважимо, що в цих ЗМС предикат $p_\beta$ нееквітонний.

Отже, для загального випадку ЗМЛ немонотонних (нееквітонних) предикатів $\Box\forall x\Phi \to \forall x\Box\Phi$ та $\exists x\Box\Phi \to \Box\exists x\Phi$ – спростовні формули, тобто вони не є істинними.

**Приклад 2** (див.[1, 7]). Формули $\Box\exists x\Phi \to \exists x\Box\Phi$ та $\forall x\Box\Phi \to \Box\forall x\Phi$ спростовні для ЗМС еквітонних предикатів.

Побудуємо ЗМС еквітонних предикатів, у якій спростовуються такі формули. Нехай $St=\{\alpha, \beta\}$, $R=\{\alpha \triangleright \beta\}$, $A_\alpha=\{a\}$, $A_\beta=\{a, b\}$, а для $p\in Ps$ неістотні усі імена, окрім $x$. Задамо $p_\alpha([x\mapsto a])=F$, $p_\beta([x\mapsto a])=F$, $p_\beta([x\mapsto b])=T$. Тоді маємо $(\Box p)_\alpha([x\mapsto a])=F$, а згідно $A_\alpha=\{a\}$ звідси $(\exists x\Box p)_\alpha([x\mapsto a])=F$. Згідно $p_\beta([x\mapsto b])=T$ маємо $(\exists x\, p)_\beta([x\mapsto a])=T$, звідки отримуємо $(\Box\exists x\, p)_\alpha([x\mapsto a])=T$. Таким чином, $(\Box\exists x\, p\to\exists x\Box p)_\alpha([x\mapsto a])=F$, звідки випливає $\alpha\,|\neq\Box\exists x\, p\to\exists x\Box p$.

Нехай для $q\in Ps$ неістотні усі імена, окрім $x$. Задамо $q_\alpha([x\mapsto a])=T$, $q_\beta([x\mapsto a])=T$, $q_\beta([x\mapsto b]])=F$. Тоді маємо $(\forall x\, q)_\beta([x\mapsto a])=F$, звідки отримуємо $(\Box\forall x\, q)_\alpha([x\mapsto a])=F$. Маємо $R=\{\alpha\triangleright\beta\}$, тому $q_\beta([x\mapsto a])=T \Rightarrow (\Box q)_\alpha([x\mapsto a])=T$. Згідно $A_\alpha=\{a\}$ тоді $(\forall x\Box q)_\alpha([x\mapsto a])=T$. Отже, $(\forall x\Box q\to\Box\forall x\, q)_\alpha([x\mapsto a])=F$, звідки $\alpha\,|\neq\forall x\Box q\to\Box\forall x\, q$.

**Наслідок 2.** В загальному випадку ЗМЛ формули $\Box\exists x\Phi\to\exists x\Box\Phi$ та $\forall x\Box\Phi\to\Box\forall x\Phi$ спростовні.

Аналогічні твердження формулюємо для ТмМС.

Розглянемо відношення логічного наслідку на множині специфікованих станами формул.

Специфікована станом формула – це об'єкт вигляду $\Phi^\alpha$, де $\Phi$ – формула мови, $\alpha$ – її специфікація (відмітка). Тут $\alpha\in S$, де S – певна множина імен станів світу. Отже, специфікація вказує на стан світу, в якому розглядається предикат, що є значенням цієї формули.

Опишемо відношення наслідку $_M|=$ для двох формул в стані $\alpha$ (специфікованих станом $\alpha$) ТМС $M$. Це робимо аналогічно визначенню відношення неспростовнісного наслідку при фіксованій інтерпретації в логіках часткових однозначних квазіарних предикатів (див. [1, 3]).

$\Phi^\alpha\,{}_M|=\Psi^\alpha$, якщо для кожного $d\in{}^VA$ маємо: $\Phi_\alpha(d)=T\Rightarrow$ неможливо $\Psi_\alpha(d)=F$.

Для відношення $_M|=$ отримуємо:

$\Phi^\alpha\,{}_M|=\Psi^\alpha \Leftrightarrow {}_M|=(\Phi\to\Psi)^\alpha \Leftrightarrow \alpha\,|=\Phi\to\Psi$;

$\Phi^\alpha\,{}_M|\neq\Psi^\alpha \Leftrightarrow {}_M|\neq(\Phi\to\Psi)^\alpha \Leftrightarrow \alpha\,|\neq\Phi\to\Psi \Leftrightarrow$ існує $d\in{}^VA$ таке, що $\Phi_\alpha(d)=T$ та $\Psi_\alpha(d)=F$.

Зокрема: $_M|\neq\Psi^\alpha \Leftrightarrow \alpha\,|\neq\Psi \Leftrightarrow$ існує $d\in{}^VA$ таке, що $\Psi_\alpha(d)=F$.

Звідси:

$_M|=\Psi^\alpha \Leftrightarrow \alpha\,|=\Psi \Leftrightarrow \Psi_\alpha(d)\neq F$ для всіх $d\in{}^VA \Leftrightarrow \Psi_\alpha$ неспростовний.

Відношення $_M|=$ наслідку для двох формул в стані $\alpha$ індукує відношення еквівалентності $_M\sim$ двох формул в стані $\alpha$.

Відношення $_M\sim$ задаємо так:

$$\Phi^\alpha\,{}_M\!\sim\Psi^\alpha \Leftrightarrow \Phi^\alpha\,{}_M|=\Psi^\alpha \text{ та } \Psi^\alpha\,{}_M|=\Phi^\alpha.$$

Для відношення $_M\sim$ отримуємо:

$$\Phi^\alpha\,{}_M\!\sim\Psi^\alpha \Leftrightarrow {}_M|=(\Phi\leftrightarrow\Psi)^\alpha \Leftrightarrow \alpha\,|=\Phi\leftrightarrow\Psi.$$

Узагальнимо відношення наслідку для двох формул в стані $\alpha$ ТМС $M$ до відношення наслідку для двох множин специфікованих станами формул в узгодженій із ними ТМС $M$.

Нехай $\Sigma$ – множина специфікованих станами формул, причому ці специфікації утворюють множину S. Множина $\Sigma$ *узгоджена* із ТМС $M=(St, R, A, Im)$, якщо задана ін'єкція S у $St$.

Нехай $\Delta$ та $\Gamma$ – множини специфікованих станами формул. $\Delta$ є наслідком $\Gamma$ в узгодженій із ними ТМС $M$ (позн. $\Gamma\,{}_M|=\Delta$), якщо для всіх $d\in{}^VA$ маємо:

$\Phi_\alpha(d)=T$ для всіх $\Phi^\alpha\in\Gamma \Rightarrow \Psi_\beta(d)\neq F$ для деякого $\Psi^\beta\in\Delta$.

Надалі запис $\Gamma\,{}_M|=\Delta$ за умовчанням означатиме узгодженість $\Gamma$ та $\Delta$ із ТМС $M$.

Із визначення випливає:

$\Gamma\,{}_M|\neq\Delta \Leftrightarrow$ існує $d\in{}^VA$ таке, що
для всіх $\Phi^\alpha\in\Gamma$ маємо $\Phi_\alpha(d)=T$ та
для всіх $\Psi^\beta\in\Delta$ маємо $\Psi_\beta(d)=F$.

$\Delta$ є логічним наслідком $\Gamma$ (відносно ТМС певного типу), якщо $\Gamma\,{}_M|=\Delta$ для всіх ТМС $M$ (які належать до цього типу). Цей факт позначаємо $\Gamma\,|=\Delta$.

Введене відношення логічного наслідку $|=$ відповідає відношенню $|=_{IR}$ [3] неспростовнісного логічного наслідку в логіках часткових квазіарних предикатів.

Сформулюємо умову відсутності відношення логічного наслідку для двох множин специфікованих станами формул.

$\Gamma \mid\neq \Delta \Leftrightarrow$ існують узгоджена із Γ та Δ ТМС $M = (St, R, A, Im)$ та $d \in {}^{V}A$ такі:

$\Phi_\alpha(d) = T$ для всіх $\Phi^\alpha \in \Gamma$ та

$\Psi_\beta(d) = F$ для всіх $\Psi^\beta \in \Delta$.

## 3. Властивості відношення логічного наслідку

Розглянемо властивості відношення логічного наслідку для множин специфікованих станами формул.

Немодальні властивості відношення $|=$ повторюють відповідні властивості відношення $|=_{IR}$ (див. [3]). Найперше це наступні властивості:

M) якщо $\Gamma |= \Delta$, $\Gamma \subseteq \Upsilon$ та $\Delta \subseteq \Sigma$, то $\Upsilon |= \Sigma$ (монотонність відношення $|=$);

*CB*) $\Phi^\alpha, \Gamma |= \Delta, \Phi^\alpha$ (базова умова гарантованої наявності відношення $|=$).

Нехай Γ та Δ – множини специфікованих формул, $Un = \{x \mid Ex^\alpha \in \Delta\}$.

Загальну умову гарантованої наявності $|=$ отримуємо на основі теореми 2:

*C*) $\Psi \sim_{Un} \Xi \Rightarrow \Psi^\alpha, \Gamma |= \Xi^\alpha, \Delta$.

Властивості еквівалентних перетворень отримуються на основі наведених в [3] властивостей R, RI, RU, RR, R¬, R∨, R∃R. Кожна така властивість R∗ продукує дві властивості $R*_L$ та $R*_R$ для відношення $|=$, коли виділена формула знаходиться у лівій чи правій його частині:

$R_L$) $R(\Phi)^\alpha, \Gamma |= \Delta \Leftrightarrow \Phi^\alpha, \Gamma |= \Delta$;

$R_R$) $\Gamma |= R(\Phi)^\alpha, \Delta \Leftrightarrow \Gamma |= \Phi^\alpha, \Delta$;

$RI_L$) $R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi)^\alpha, \Gamma |= \Delta \Leftrightarrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)^\alpha, \Gamma |= \Delta$;

$RI_R$) $\Gamma |= R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi)^\alpha, \Delta \Leftrightarrow \Gamma |= R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)^\alpha, \Delta$.

За умови $z \in \nu(\Phi)$ маємо:

$RU_L$) $R_{y,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi)^\alpha, \Gamma |= \Delta \Leftrightarrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)^\alpha, \Gamma |= \Delta$;

$RU_R$) $\Gamma |= \Delta, R_{y,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi)^\alpha \Leftrightarrow \Gamma |= \Delta, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)^\alpha$.

$RR_L$) $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi))^\alpha, \Gamma |= \Delta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_{\bar{y}}^{\bar{w}} (\Phi)^\alpha, \Gamma |= \Delta$;

$RR_R$) $\Gamma |= \Delta, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi))^\alpha \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Gamma |= \Delta, R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_{\bar{y}}^{\bar{w}} (\Phi)^\alpha$;

$R\neg_L$) $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg\Phi)^\alpha, \Gamma |= \Delta \Leftrightarrow \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)^\alpha, \Gamma |= \Delta$;

$R\neg_R$) $\Gamma |= \Delta, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg\Phi)^\alpha \Leftrightarrow \Gamma |= \Delta, \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)^\alpha$;

$R\vee_L$) $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi \vee \Psi)^\alpha, \Gamma |= \Delta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi)^\alpha, \Gamma |= \Delta$;

$R\vee_R$) $\Gamma |= \Delta, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi \vee \Psi)^\alpha \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Gamma |= \Delta, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi)^\alpha$;

$R\exists R_L$) $\mathrm{R}_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\exists x\Phi)^\alpha, \Gamma |= \Delta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \mathrm{R}_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)^\alpha, \Gamma |= \Delta$;

$R\exists R_R$) $\Gamma |= \Delta, \mathrm{R}_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\exists x\Phi)^\alpha \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Gamma |= \Delta, \mathrm{R}_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)^\alpha$.

Подібно до $R\vee_L$ та $R\vee_R$ формулюємо властивості для похідних логічних зв'язок → та &, подібно до $R\exists R_L$ та $R\exists R_R$ – властивості $R\forall R_L$ та $R\forall R_R$.

До властивостей еквівалентних перетворень відносяться також властивості пронесення модальностей через реномінацію. У випадку ЗМС маємо:

$R\Box_L$) $\Gamma, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Box\Phi)^\alpha |= \Delta \Leftrightarrow \Gamma, \Box R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)^\alpha |= \Delta$;

$R\Box_R$) $\Gamma |= \Delta, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Box\Phi)^\alpha \Leftrightarrow \Gamma |= \Delta, \Box R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)^\alpha$.

У випадку ТмМС маємо:

$R\Box\uparrow_L$) $\Gamma, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Box\Phi)^\alpha |= \Delta \Leftrightarrow \Gamma, \Box R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)^\alpha |= \Delta$;

$R\Box\uparrow_R$) $\Gamma |= \Delta, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Box\Phi)^\alpha \Leftrightarrow \Gamma |= \Delta, \Box R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)^\alpha$;

$R\Box\downarrow_L$) $\Gamma, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Box\Phi)^\alpha |= \Delta \Leftrightarrow \Gamma, \Box R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)^\alpha |= \Delta$;

$R\Box\downarrow_R$) $\Gamma |= \Delta, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Box\Phi)^\alpha \Leftrightarrow \Gamma |= \Delta, \Box R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)^\alpha$.

Властивості декомпозиції формул:

$\neg_L$) $\neg\Phi^\alpha, \Gamma |= \Delta \Leftrightarrow \Gamma |= \Delta, \Phi^\alpha$;

$\neg_R$) $\Gamma |= \Delta, \neg\Phi^\alpha \Leftrightarrow \Phi^\alpha, \Gamma |= \Delta$;

$\vee_L$) $\Phi \vee \Psi^\alpha, \Gamma |= \Delta \Leftrightarrow \Phi^\alpha, \Gamma |= \Delta$ та $\Psi^\alpha, \Gamma |= \Delta$;

$\vee_R$) $\Gamma |= \Delta, \Phi \vee \Psi^\alpha \Leftrightarrow \Gamma |= \Delta, \Phi^\alpha, \Psi^\alpha$.

Наведемо властивості елімінації кванторів; для їх опису використаємо спеціальні предикати-індикатори $Ez$:

$\exists_L$) за умови $z\in fu(\Gamma, \Delta, \exists x\Phi)$ маємо

$$\exists x\Phi^{\alpha}, \Gamma\ _M|= \Delta \Leftrightarrow R_z^x(\Phi)^{\alpha}, Ez^{\alpha}, \Gamma\ _M|= \Delta\,;$$

$\exists R_L$) за умови $z\in fu(\Gamma, \Delta, R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi))$ маємо

$$R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)^{\alpha}, \Gamma\ _M|= \Delta \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow R_{\bar{v},z}^{\bar{u},x}(\Phi)^{\alpha}, Ez^{\alpha}, \Gamma\ _M|= \Delta\,;$$

$\exists v_R$) $Ey^{\alpha}, \Gamma\ _M|= \exists x\Phi^{\alpha}, \Delta \Leftrightarrow$
$$\Leftrightarrow Ey^{\alpha}, \Gamma\ _M|= \exists x\Phi^{\alpha}, R_y^x(\Phi)^{\alpha}, \Delta\,;$$

$\exists Rv_R$) $Ey^{\alpha}, \Gamma\ _M|= \Delta, R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)^{\alpha} \Leftrightarrow$
$$\Leftrightarrow Ey^{\alpha}, \Gamma\ _M|= \Delta, R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)^{\alpha}, R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi)^{\alpha}\,.$$

Подібним чином формулюємо властивості декомпозиції для $\to$ та & та властивості елімінації кванторів $\forall x$.

Властивості $E$-розподілу та первісного означення:

Ed) $\Gamma |= \Delta \Leftrightarrow Ey^{\alpha}, \Gamma |= \Delta$ та $\Gamma |= \Delta, Ey^{\alpha}$;

Ev) $\Gamma |= \Delta \Leftrightarrow Ez^{\alpha}, \Gamma |= \Delta$ за умови $z\in fu(\Gamma, \Delta)$.

Наведемо властивості елімінації модальностей. У випадку ЗМС маємо:

$\Box_L$) $\Box\Phi^{\alpha}, \Gamma |= \Delta \Leftrightarrow \{\Phi^{\beta} \mid \alpha \rhd \beta\}\cup\Gamma |= \Delta$;

$\Box_R$) $\Gamma |= \Delta, \Box\Phi^{\alpha} \Leftrightarrow \Gamma |= \Delta, \Phi^{\beta}$ для всіх $\beta\in S$ таких, що $\alpha \rhd \beta$.

У випадку ТмМС маємо:

$\Box\uparrow_L$) $\Box\uparrow\Phi^{\alpha}, \Gamma |= \Delta \Leftrightarrow \{\Phi^{\beta} \mid \alpha \rhd \beta\}\cup\Gamma |= \Delta$;

$\Box\uparrow_R$) $\Gamma |= \Delta, \Box\uparrow\Phi^{\alpha} \Leftrightarrow \Gamma |= \Delta, \Phi^{\beta}$ для всіх $\beta\in S$ таких, що $\alpha \rhd \beta$.

$\Box\downarrow_L$) $\Box\downarrow\Phi^{\alpha}, \Gamma |= \Delta \Leftrightarrow \{\Phi^{\beta} \mid \beta \rhd \alpha\}\cup\Gamma |= \Delta$;

$\Box\downarrow_R$) $\Gamma |= \Delta, \Box\downarrow\Phi^{\alpha} \Leftrightarrow \Gamma |= \Delta, \Phi^{\beta}$ для всіх $\beta\in S$ таких, що $\beta \rhd \alpha$.

Зауважимо, що властивості для $\Box\uparrow$ записуємо аналогічно властивостям для $\Box$.

Для властивостей відношення |= доцільно вказати відповідні дуальні властивості відношення $|\neq$, за якими *безпосередньо* виписуємо секвенційні форми. Для наведених властивостей відношення |=, окрім $\vee_L$ та $\Box_R$ ($\Box\uparrow_R$ та $\Box\downarrow_R$ у випадку ТмМС) відповідні властивості відношення $|\neq$ отримуємо заміною символа |= на символ $|\neq$.

Наприклад, для $\vee_L$ та $\Box_R$ маємо:

$_L\vee$) $\Phi\vee\Psi^{\alpha}, \Gamma |\neq \Delta \Leftrightarrow \Phi^{\alpha}, \Gamma |\neq \Delta$ або $\Psi^{\alpha}, \Gamma |\neq \Delta$;

$_R\Box$) $\Gamma |\neq \Delta, \Box\Phi^{\alpha} \Leftrightarrow \Gamma |\neq \Delta, \Phi^{\beta}$ для деякого $\beta\in S$ такого, що $\alpha \rhd \beta$.

При наявності додаткових умов, накладених на $\rhd$, властивості елімінації модальностей відповідним чином модифікуються. Розглянемо випадки, коли $\rhd$ може бути транзитивними, рефлексивними чи симетричними. Запишемо дуальні властивості для $|\neq$ у випадку ЗМС.

1. $\rhd$ *рефлексивне.* Маємо $_L\Box$ та $_R\Box$; $\alpha \rhd \alpha$ для $_L\Box$ дає умову $\Phi^{\alpha}\in\{\Phi^{\beta} \mid \alpha \rhd \beta\}$.

2. $\rhd$ *симетричне.* $_L\Box$ та $_R\Box$ записуємо так (маємо $\alpha \rhd \beta \Leftrightarrow \beta \rhd \alpha$):

$_L\Box S$) $\Box\Phi^{\alpha}, \Gamma |\neq \Delta \Leftrightarrow$
$$\Leftrightarrow \{\Phi^{\beta} \mid \alpha \rhd \beta \text{ чи } \beta \rhd \alpha\}\cup\Gamma |\neq \Delta.$$

$_R\Box S$) $\Gamma |\neq \Delta, \Box\Phi^{\alpha} \Leftrightarrow \Gamma |\neq \Delta, \Phi^{\beta}$ для деякого $\beta\in S$ такого: $\alpha \rhd \beta$ чи $\beta \rhd \alpha$.

3. $\rhd$ *рефлексивне й симетричне.* Маємо $_R\Box S$ та $_L\Box S$, при цьому в силу $\alpha \rhd \alpha$ для $_L\Box S$ умова $\Phi^{\alpha}\in\{\Phi^{\beta} \mid \alpha \rhd \beta \text{ чи } \beta \rhd \alpha\}$.

4. $\rhd$ *транзитивне.* Маємо $_R\Box$ та

$_L\Box T$) $\Box\Phi^{\alpha}, \Gamma |\neq \Delta \Leftrightarrow$
$$\Leftrightarrow \{\Phi^{\beta} \mid \alpha \rhd \beta\}\cup\{\Box\Phi^{\beta} \mid \alpha \rhd \beta\}\cup\Gamma |\neq \Delta.$$

Наявність $\{\Box\Phi^{\beta} \mid \alpha \rhd \beta\}\cup\Gamma$ необхідна через транзитивність відношення $\rhd$.

5. $\rhd$ *транзитивне й рефлексивне.* Маємо $_R\Box$ та $_L\Box T$, причому в силу $\alpha \rhd \alpha$ для $_L\Box T$ умова $\Phi^{\alpha}\in\{\Phi^{\beta} \mid \alpha \rhd \beta\}$.

6. $\rhd$ *транзитивне й симетричне.* Тоді маємо $_R\Box S$ та

$_L\Box TS$) $\Box\Phi^{\alpha}, \Gamma |\neq \Delta \Leftrightarrow$
$$\Leftrightarrow \{\Phi^{\beta} \mid \alpha \rhd \beta \text{ чи } \beta \rhd \alpha\}\cup$$
$$\cup\{\Box\Phi^{\beta} \mid \alpha \rhd \beta \text{ чи } \beta \rhd \alpha\}\cup\Gamma |\neq \Delta.$$

7. $\rhd$ *транзитивне, рефлексивне й симетричне.* Маємо $_{R}\Box S$ та $_{L}\Box TS$, причому для $_{L}\Box TS$ умова $\Phi^{\alpha} \in \{\Phi^{\beta} \,|\, \alpha \rhd \beta$ чи $\beta \rhd \alpha\}$.

Подібним чином дуальні властивості елімінації модальностей формулюємо для ТмМС. При цьому властивості для $\Box\uparrow$ записуються аналогічно відповідним властивостям для $\Box$. Якщо $\rhd$ симетричне, то властивості для $\Box\uparrow$ та $\Box\downarrow$ ідентичні, це фактично властивості для $\Box$.

## 4. Секвенційні числення чистих першопорядкових ТМЛ

В цій роботі зосередимося на численнях ЗМЛ. Подібним чином можна розглядати числення ММЛ. Числення ТмМЛ отримуємо з числень ЗМЛ розщепленням секвенційних форм із модальностями.

Секвенції ми трактуємо як множини специфікованих станами формул. Специфікації мають вигляд $\alpha\vdash$ чи $\alpha\dashv$, де $\alpha$ – ім'я стану. Виділяючи $_{\vdash}$-формули та $_{\dashv}$-формули, секвенції позначаємо $_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$.

Специфіковані формули вигляду $_{\alpha\vdash}R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)$, $_{\alpha\vdash}\exists x\Phi$ назвемо $\exists_T$-формулами, а вигляду $_{\alpha\dashv}R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)$, $_{\alpha\dashv}\exists x\Phi$ – $\exists_F$-формулами. *Прикладами* формул $R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi), \exists x\Phi$ назвемо формули вигляду $R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi), R_{y}^{x}(\Phi)$.

Для секвенції $\Sigma$ та стану $\alpha$ задамо секвенцію $\Sigma_{\alpha} = \{{}_{\sigma}\Phi \,|\, \sigma = \alpha\vdash$ чи $\sigma = \alpha\dashv\}$ формул стану $\alpha$. При побудові виведення збагачуємо секвенції збудованими на даний момент виведення множинами відношень на станах. Збагачені секвенції записуємо як $\Sigma\ //\ M$, де $M$ – схема моделі світу, тобто збудоване на цей момент відношення досяжності, записане для імен станів.

Множини означених, неозначених і нерозподілених імен стану $\alpha$ секвенції $\Sigma$ задамо так:

$val(\Sigma_{\alpha}) = \{u \,|\, {}_{\alpha\vdash}Eu \in \Sigma\}$;

$unv(\Sigma_{\alpha}) = \{u \,|\, {}_{\alpha\dashv}Eu \in \Sigma\}$;

$ud(\Sigma_{\alpha}) = nm(\Sigma_{\alpha}) \setminus (val(\Sigma_{\alpha}) \cup unv(\Sigma_{\alpha}))$.

Виведення в секвенційних численнях має вигляд дерева, вершинами якого є секвенції. Правилами виведення секвенційних числень є секвенційні форми, вони безпосередньо виписуються за дуальними властивостями відношення $|\neq$. Аксіомами секвенційних числень є замкнені секвенції. Для замкненої секвенції $_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ має виконуватись умова $\Gamma \models \Delta$.

Секвенційне дерево замкнене, якщо всі його листи – замкнені секвенції.

Секвенція $\Sigma$ вивідна, якщо існує замкнене секвенційне дерево з коренем $\Sigma$.

Опишемо числення чистих першопорядкових ЗМЛ та ТмМЛ.

Секвенційне числення визначається умовами замкненості секвенції та базовими секвенційними формами.

На основі умови *C* гарантованої наявності відношення $\models$ отримуємо загальну умову замкненості секвенції $\Sigma$:

C) існують $\alpha$ та $Rs$-$Un_{\alpha}$-еквівалентні $\Phi$ та $\Psi$ такі: $_{\alpha\vdash}\Phi \in \Sigma$ та $_{\alpha\dashv}\Psi \in \Sigma$;

зокрема, існують $\alpha$ та формула $\Phi$ така: $_{\alpha\vdash}\Phi \in \Sigma$ та $_{\alpha\dashv}\Phi \in \Sigma$.

Тут $Un_{\alpha} = \{u \in V \,|\, {}_{\alpha\dashv}Eu \in \Sigma_{\alpha}\}$.

Базові секвенційні форми індуковані відповідними властивостями відношення $\models$ логічного наслідку, а виписуються за дуальними властивостями відношення $|\neq$.

Основні форми еквівалентних перетворень:

$$_{\vdash}\mathrm{RR}\ \frac{_{\alpha\vdash}R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ {}_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi), \Sigma\ //\ M}{_{\alpha\vdash}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)), \Sigma\ //\ M};$$

$$_{\dashv}\mathrm{RR}\ \frac{_{\alpha\dashv}R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ {}_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi), \Sigma\ //\ M}{_{\alpha\dashv}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)), \Sigma\ //\ M};$$

$$_{\vdash}\mathrm{R}\neg\ \frac{_{\alpha\vdash}\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi), \Sigma\ //\ M}{_{\alpha\vdash}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg\Phi), \Sigma\ //\ M};$$

$$_{\dashv}\mathrm{R}\neg\ \frac{_{\alpha\dashv}\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi), \Sigma\ //\ M}{_{\alpha\dashv}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg\Phi), \Sigma\ //\ M};$$

$$_{\vdash}\mathrm{R}\vee\ \frac{_{\alpha\vdash}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi), \Sigma\ //\ M}{_{\alpha\vdash}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi \vee \Psi), \Sigma\ //\ M};$$

$$_{\dashv}\mathrm{R}\vee\ \frac{_{\alpha\dashv}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi), \Sigma\ //\ M}{_{\alpha\dashv}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi \vee \Psi), \Sigma\ //\ M};$$

$\vdash$R□ $\dfrac{_{\alpha}\vdash \Box R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi),\Sigma\ //M}{_{\alpha}\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Box\Phi),\Sigma\ //M}$;

$\dashv$R□ $\dfrac{_{\alpha}\dashv \Box R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi),\Sigma\ //M}{_{\alpha}\dashv R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Box\Phi),\Sigma\ //M}$.

У випадку ТмМС замість $\vdash$R□ та $\dashv$R□ маємо:

$\vdash$R□↑ $\dfrac{_{\alpha}\vdash \Box\!\uparrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi),\Sigma\ //M}{_{\alpha}\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Box\!\uparrow\Phi),\Sigma\ //M}$;

$\dashv$R□↑ $\dfrac{_{\alpha}\dashv \Box\!\uparrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi),\Sigma\ //M}{_{\alpha}\dashv R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Box\!\uparrow\Phi),\Sigma\ //M}$;

$\vdash$R□↓ $\dfrac{_{\alpha}\vdash \Box\!\downarrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi),\Sigma\ //M}{_{\alpha}\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Box\!\downarrow\Phi),\Sigma\ //M}$;

$\dashv$R□↓ $\dfrac{_{\alpha}\dashv \Box\!\downarrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi),\Sigma\ //M}{_{\alpha}\dashv R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Box\!\downarrow\Phi),\Sigma\ //M}$.

Окрім основних форм еквівалентних перетворень, використовуємо допоміжні форми *спрощення.* Ці форми індукуються властивостями $R_L$, $R_R$, $RI_L$, $RI_R$, $RU_L$, $RU_R$, $R\exists R_L$, $R\exists R_R$ відношення |=. Перетворення на основі форм спрощення закладені в умови замкненості секвенції: для встановлення *Rs*-*Un*$_{\alpha}$-еквівалентності формул необхідна побудова їх *Rs*-форм, що робиться на основі властивостей R, RI, RU, R∃R.

Форми спрощення такі:

$\vdash$R $\dfrac{_{\alpha}\vdash \Phi,\Sigma\ //M}{_{\alpha}\vdash R(\Phi),\Sigma\ //M}$;

$\dashv$R $\dfrac{_{\alpha}\dashv \Phi,\Sigma\ //M}{_{\alpha}\dashv R(\Phi),\Sigma\ //M}$;

$\vdash$RI $\dfrac{_{\alpha}\vdash R_{\bar{u}}^{\bar{v}}(\Phi),\Sigma\ //M}{_{\alpha}\vdash R_{y,\bar{u}}^{y,\bar{v}}(\Phi),\Sigma\ //M}$;

$\dashv$RI $\dfrac{_{\alpha}\dashv R_{\bar{u}}^{\bar{v}}(\Phi),\Sigma\ //M}{_{\alpha}\dashv R_{y,\bar{u}}^{y,\bar{v}}(\Phi),\Sigma\ //M}$;

$\vdash$RU $\dfrac{_{\alpha}\vdash R_{\bar{u}}^{\bar{v}}(\Phi),\Sigma //M}{_{\alpha}\vdash R_{z,\bar{u}}^{y,\bar{v}}(\Phi),\Sigma //M}$, $y\in v(\Phi)$;

$\dashv$RU $\dfrac{_{\alpha}\dashv R_{\bar{u}}^{\bar{v}}(\Phi),\Sigma\ //M}{_{\alpha}\dashv R_{z,\bar{u}}^{y,\bar{v}}(\Phi),\Sigma\ //M}$, $y\in v(\Phi)$;

$\vdash$R∃R $\dfrac{_{\alpha}\vdash R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi),\Sigma\ //M}{_{\alpha}\vdash R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\exists x\Phi),\Sigma\ //M}$;

$\dashv$R∃R $\dfrac{_{\alpha}\dashv R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi),\Sigma\ //M}{_{\alpha}\dashv R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\exists x\Phi),\Sigma\ //M}$.

Форми декомпозиції формул:

$\vdash\neg$ $\dfrac{_{\alpha}\dashv \Phi,\Sigma\ //M}{_{\alpha}\vdash \neg\Phi,\Sigma\ //M}$;

$\dashv\neg$ $\dfrac{_{\alpha}\vdash \Phi,\Sigma\ //M}{_{\alpha}\dashv \neg\Phi,\Sigma\ //M}$;

$\vdash\vee$ $\dfrac{_{\alpha}\vdash \Phi,\Sigma\ //M \qquad _{\alpha}\vdash \Psi,\Sigma\ //M}{_{\alpha}\vdash \Phi\vee\Psi,\Sigma\ //M}$;

$\dashv\vee$ $\dfrac{_{\alpha}\dashv \Phi,\ _{\alpha}\dashv \Psi,\Sigma\ //M}{_{\alpha}\dashv \Phi\vee\Psi,\Sigma\ //M}$.

Форми елімінації кванторів:

$\vdash\exists$ $\dfrac{_{\alpha}\vdash R_{z}^{x}(\Phi),\ _{\alpha}\vdash Ez,\Sigma\ //M}{_{\alpha}\vdash \exists x\Phi,\Sigma\ //M}$, $z\in fu(\Sigma,\exists x\Phi)$;

$\vdash\exists$R $\dfrac{_{\alpha}\vdash R_{\bar{v},z}^{\bar{u},x}(\Phi),\ \vdash Ez,\Sigma\ //M}{_{\alpha}\vdash R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi),\Sigma\ //M}$,

$z\in fu(\Sigma, R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi))$;

$\dashv\exists$v $\dfrac{_{\alpha}\dashv \exists x\Phi,\ _{\alpha}\dashv R_{y}^{x}(\Phi),\ _{\alpha}\vdash Ey,\Sigma\ //M}{_{\alpha}\dashv \exists x\Phi,\ _{\alpha}\vdash Ey,\Sigma\ //M}$;

$\dashv\exists$Rv $\dfrac{_{\alpha}\dashv R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi),\ _{\alpha}\dashv R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi),\ \vdash Ey,\Sigma\ //M}{_{\alpha}\dashv R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi),\ \vdash Ey,\Sigma\ //M}$.

$\vdash\exists$ та $\vdash\exists$R назвемо $\exists_T$-формами, $\dashv\exists$v та $\dashv\exists$Rv назвемо $\exists_F$-формами.

Форми *E*-розподілу та первісного означення:

Ed $\dfrac{_{\alpha}\vdash Ex,\ \Sigma\ //M \quad _{\alpha}\dashv Ex,\ \Sigma\ //M}{\Sigma}$, $x\notin nm(\Sigma_{\alpha})$;

Ev $\dfrac{_{\alpha}\vdash Ez,\ \Sigma\ //M}{\Sigma\ //M}$, $z\in fu(\Sigma)$.

Форми елімінації модальних операторів залежать від властивостей відношення $\rhd$. Розглянемо традиційні випадки, коли $\rhd$ може бути рефлексивним, транзитивним чи симетричним. Це дає (див. також [8]) наступні різновиди чистих першопорядкових числень ЗМЛ.

1. *На $\rhd$ не накладені додаткові умови*. Маємо *GMQC*-числення.

Якщо в момент застосування форми до ${}_{\alpha|-}\Box\Phi$ маємо стани $\beta_1, \ldots, \beta_n$ такі, що $\alpha \rhd \beta_1, \ldots, \alpha \rhd \beta_n$, то до ${}_{\alpha|-}\Box\Phi$ застосовуємо

$$_{|-}\Box \ \frac{{}_{\alpha|-}\Box\Phi,\ {}_{\beta_1|-}\Phi, \ldots, {}_{\beta_n|-}\Phi,\ \Sigma\ //\ M}{{}_{\alpha|-}\Box\Phi, \Sigma\ //\ M}.$$

Якщо ж таких $\gamma$, що $\alpha \rhd \gamma$, немає, то до ${}_{\alpha|-}\Box\Phi$ застосовуємо форму

$$_{|-}\Box\mathrm{f}\ \frac{{}_{\alpha|-}\Box\Phi,\ {}_{\beta|-}\Phi, \Sigma\ //\ M \cup \{\alpha \rhd \beta\}}{{}_{\alpha|-}\Box\Phi,\ \Sigma\ //\ M},$$

$\beta$ – новий стан.

Форма, яка застосовується до ${}_{\alpha-|}\Box\Phi$:

$$_{-|}\Box\ \frac{{}_{\beta-|}\Phi, \Sigma\ //\ M \cup \{\alpha \rhd \beta\}}{{}_{\alpha-|}\Box\Phi,\ \Sigma\ //\ M},$$

$\beta$ – новий стан.

2. $\rhd$ *рефлексивне.* Маємо *GMQC_R*-числення. До ${}_{\alpha|-}\Box\Phi$ застосовуємо форму $_{|-}\Box$ для всіх станів $\beta_1, \ldots, \beta_n$ таких, що в момент її застосування $\alpha \rhd \beta_1, \ldots, \alpha \rhd \beta_n$. За рефлективністю $\rhd$ маємо $\alpha \rhd \alpha$.

Форма, яка застосовується до ${}_{\alpha-|}\Box\Phi$:

$$_{-|}\Box\mathrm{R}\ \frac{{}_{\beta-|}\Phi, \Sigma\ //\ M \cup \{\alpha \rhd \beta, \beta \rhd \beta\}}{{}_{\alpha-|}\Box\Phi,\ \Sigma\ //\ M},$$

$\beta$ – новий стан.

3. $\rhd$ *симетричне.* Маємо *GMQC_S*-числення. Тоді $\alpha \rhd \beta \Leftrightarrow \beta \rhd \alpha$ за симетричністю $\rhd$ Якщо в момент застосування форми до ${}_{\alpha|-}\Box\Phi$ маємо $\beta_1, \ldots, \beta_n$ такі, що $\alpha \rhd \beta_1, \ldots, \alpha \rhd \beta_n$, то застосовуємо $_{|-}\Box$. Якщо таких $\gamma$, що $\alpha \rhd \gamma$, немає, то застосовуємо

$$_{|-}\Box\mathrm{fS}\ \frac{{}_{\alpha|-}\Box\Phi,\ {}_{\beta|-}\Phi, \Sigma\ //\ M \cup \{\alpha \rhd \beta, \beta \rhd \alpha\}}{{}_{\alpha|-}\Box\Phi,\ \Sigma\ //\ M},$$

$\beta$ – новий стан.

До ${}_{\alpha-|}\Box\Phi$ застосовується форма:

$$_{-|}\Box\mathrm{S}\ \frac{{}_{\beta-|}\Phi, \Sigma\ //\ M \cup \{\alpha \rhd \beta, \beta \rhd \alpha\}}{{}_{\alpha-|}\Box\Phi,\ \Sigma\ //\ M},$$

$\beta$ – новий стан.

4. $\rhd$ *рефлексивне та симетричне.* Отримуємо *GMQC_RS*-числення. До ${}_{\alpha|-}\Box\Phi$ застосовуємо форму $_{|-}\Box$ для всіх станів $\beta_1, \ldots, \beta_n$ таких, що в момент її застосування $\alpha \rhd \beta_1, \ldots, \alpha \rhd \beta_n$. Зауважимо, що завжди маємо $\alpha \rhd \alpha$ та завжди $\alpha \rhd \beta \Leftrightarrow \beta \rhd \alpha$.

До ${}_{\alpha-|}\Box\Phi$ застосовується форма:

$$_{-|}\Box\mathrm{RS}\ \frac{{}_{\beta-|}\Phi, \Sigma\ //\ M \cup \{\alpha \rhd \beta, \beta \rhd \alpha, \beta \rhd \beta\}}{{}_{\alpha-|}\Box\Phi,\ \Sigma\ //\ M},$$

$\beta$ – новий стан.

5. $\rhd$ *транзитивне.* Тоді маємо *GMQC_T*-числення. Якщо в момент застосування форми до ${}_{\alpha|-}\Box\Phi$ маємо $\beta_1, \ldots, \beta_n$ такі, що $\alpha \rhd \beta_1, \ldots, \alpha \rhd \beta_n$, то застосовуємо:

$$_{|-}\Box\mathrm{T}\ \frac{{}_{\alpha|-}\Box\Phi,\ {}_{\beta_1|-}\Phi, \ldots, {}_{\beta_n|-}\Phi,\ {}_{\beta_1|-}\Box\Phi, \ldots, {}_{\beta_n|-}\Box\Phi,\ \Sigma\ //\ M}{{}_{\alpha|-}\Box\Phi, \Sigma\ //\ M}.$$

Через транзитивність $\rhd$ тут необхідні ${}_{\beta_1|-}\Box\Phi, \ldots, {}_{\beta_n|-}\Box\Phi$. Якщо ж таких $\gamma$, що $\alpha \rhd \gamma$, немає, то застосовуємо

$$_{|-}\Box\mathrm{fT}\ \frac{{}_{\alpha|-}\Box\Phi,\ {}_{\beta|-}\Phi,\ {}_{\beta|-}\Box\Phi,\ \Sigma\ //\ M \cup \{\alpha \rhd \beta\}}{{}_{\alpha|-}\Box\Phi,\ \Sigma\ //\ M},$$

$\beta$ – новий стан.

До ${}_{\alpha-|}\Box\Phi$ застосовуємо форму $_{-|}\Box$.

6. $\rhd$ *транзитивне й рефлексивне.* Отримуємо *GMQC_RT*-числення. До ${}_{\alpha|-}\Box\Phi$ застосовуємо форму $_{|-}\Box\mathrm{T}$ для всіх станів $\beta_1, \ldots, \beta_n$ таких, що в момент її застосування $\alpha \rhd \beta_1, \ldots, \alpha \rhd \beta_n$ (тут завжди маємо $\alpha \rhd \alpha$).

До ${}_{\alpha-|}\Box\Phi$ застосовуємо форму $_{-|}\Box\mathrm{R}$.

7. $\rhd$ *транзитивне й симетричне.* Отримуємо *GMQC_TS*-числення. Якщо в момент застосування форми до ${}_{\alpha|-}\Box\Phi$ маємо $\beta_1, \ldots, \beta_n$ такі, що $\alpha \rhd \beta_1, \ldots, \alpha \rhd \beta_n$, то застосовуємо $_{|-}\Box\mathrm{T}$ (завжди $\alpha \rhd \beta \Leftrightarrow \beta \rhd \alpha$). Якщо немає $\gamma$: $\alpha \rhd \gamma$, то застосовуємо

$$ {}_{\vdash}\Box fTS\ \frac{{}_{\alpha\vdash}\Box\Phi,\ {}_{\beta\vdash}\Phi,\ {}_{\beta\vdash}\Box\Phi, \Sigma \,//\, M \cup \{\alpha \rhd \beta, \beta \rhd \alpha\}}{{}_{\alpha\vdash}\Box\Phi,\ \Sigma \,//\, M}, $$

$\beta$ – новий стан.

До ${}_{\alpha\dashv}\Box\Phi$ застосовуємо форму ${}_{\dashv}\Box S$.

8. $\rhd$ *транзитивне, рефлексивне й симетричне.* Маємо *GMQC_RTS*-числення.

До ${}_{\alpha\vdash}\Box\Phi$ застосовуємо форму ${}_{\vdash}\Box T$ для всіх станів $\beta_1, \ldots, \beta_n$ таких, що в момент її застосування $\alpha \rhd \beta_1, \ldots, \alpha \rhd \beta_n$ (завжди маємо $\alpha \rhd \alpha$ та $\alpha \rhd \beta \Leftrightarrow \beta \rhd \alpha$).

До ${}_{\alpha\dashv}\Box\Phi$ застосовуємо ${}_{\dashv}\Box RS$.

Подібним чином розглядаємо випадки, коли $\rhd$ може бути рефлексивним, транзитивним чи симетричним, для ТмМС. Це дає такі різновиди чистих першопорядкових числень ТмМЛ:

*TmMQC*, *TmMQC_R*, *TmMQC_S*, *TmMQC_RS*, *TmMQC_T*, *TmMQC_RT*, *TmMQC_TS*, *TmMQC_RTS*.

Форми елімінації для $\Box\uparrow$ записуємо аналогічно відповідним формам для $\Box$. Якщо $\rhd$ симетричне, то форми елімінації $\Box\uparrow$ та $\Box\downarrow$ ідентичні, це фактично форми елімінації $\Box$. Тому числення *TmMQC_S*, *TmMQC_RS*, *TmMQC_TS*, *TmMQC_RTS* цілком ідентичні численням *GMQC_S*, *GMQC_GRS*, *GMQC_GTS*, *GMQC_GRTS*.

Основну властивість введених секвенційних форм описує

**Теорема 4.** Нехай $\dfrac{{}_{\vdash}\Lambda\,{}_{\dashv}K \,//\, M}{{}_{\vdash}\Gamma\,{}_{\dashv}\Delta \,//\, M}$ та $\dfrac{{}_{\vdash}N\,{}_{\dashv}P \,//\, M \quad {}_{\vdash}X\,{}_{\dashv}Z \,//\, M}{{}_{\vdash}\Pi\,{}_{\dashv}\Omega \,//\, M}$ – секвенційні форми. Тоді:

1) $\Lambda \models K \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta$; $N \models P$ та $X \models Z \Leftrightarrow \Pi \models \Omega$;

2) $\Gamma \not\models \Delta \Leftrightarrow \Lambda \not\models K$; $\Pi \not\models \Omega \Leftrightarrow N \not\models P$ або $X \not\models Z$.

Поетапна побудова виведення – секвенційного дерева – для заданої зліченної чи скінченної секвенції $\Sigma$ в численнях ТМЛ немонотонних предикатів подібна до відповідних побудов у численнях логік немонотонних квазіарних предикатів та числень ТМЛ еквітонних предикатів. Побудову дерева ведемо паралельно із побудовою схеми моделі світу, ця схема оновлюється при застосуванні форм елімінації модальностей, які додають нові стани.

Побудова дерева починається з його кореня – секвенції $\Sigma$. Кожне застосування секвенційної форми проводимо до скінченної множини доступних на даний момент формул. На початку кожного етапу в усіх незамкнених секвенціях виконуємо крок доступу: до списку доступних додаємо по одній зі списків ${}_{\vdash}$-формул та ${}_{\dashv}$-формул. На початку побудови доступна пара перших формул списків (єдина ${}_{\vdash}$-формула чи ${}_{\dashv}$-формула, якщо один зі списків порожній). Після виконання кожної форми перевіряємо, чи буде вершина-секвенція замкненою. При появі замкненої секвенції побудова дерева на цьому шляху обривається.

Секвенції – це *множини* специфікованих формул, тому якщо при виконанні форми отримуємо специфіковану формулу, яка вже є в секвенції, то формулу-копію до секвенції не заносимо.

Якщо всі листи будованого дерева замкнені, то отримано замкнене секвенційне дерево, побудова завершена позитивно. Якщо ні, то у випадку виведення *скінченної* секвенції $\Sigma$ додатково перевіряємо незамкнені листи на фінальність.

Незамкнена вершина-секвенція $\Omega$ фінальна, якщо до неї незастосовна жодна форма, або кожне застосування форми до $\Omega$ не вводить формул, відмінних від формул секвенцій на шляху від $\Sigma$ до $\Omega$. Поява фінальної секвенції означає ситуацію повторення незамкненої секвенції на шляху, тому всі вершини цього шляху незамкнені, такий шлях назвемо незамкненим.

Опишемо етап виведення для незамкненої листа-секвенції. Нехай на початку етапу після додавання до неї пари нових доступних формул отримана секвенція $\xi$. Активізуємо всі доступні (окрім примітивних) формули $\xi$, до кожної активної формули застосовуємо відповідну форму. Після застосування основної форми утворені нею формули на даному етапі пасивні, до них на цьому етапі основні форми незастосовні. В процесі застосування основних форм виконуємо спрощення, застосовуючи допоміжні форми типів R, RI, RU, R$\exists$R.

Застосування на етапі основних секвенційних форм проводимо так.

Спочатку для кожного наявного в $\xi$ стану виконуємо 1-засновкові форми типу RR, R$\neg$, R$\vee$, R$\Box$, $\neg$, $\exists_T$. При застосуванні $\exists_T$-форми кожен раз беремо *нове* тотально неістотне $z \in V$. Множину нових $z$, використаних для активних $\exists_T$-формул стану $\alpha$ секвенції $\xi$, позначимо $vt_{\xi\alpha}$. Нехай після застосування цих 1-засновкових форм маємо секвенцію $\xi_0$. Нехай в $\xi_0$ є $l$ активних формул, до яких застосовна 2-засновкова ${}_{\vdash}\vee$. Ці застосування ведуть до побудови для $\xi_0$ піддерева, що має $n = 2^l$ листів-наступників секвенції $\xi_0$, нехай це $\xi_1,\ldots,\xi_n$. Нехай $\vartheta, \vartheta_0, \vartheta_1,\ldots, \vartheta_n$ – множини доступних формул секвенцій на шляхах від $\Sigma$ до $\xi, \xi_0, \xi_1,\ldots, \xi_n$. Для цих $\vartheta_k$ та наявних у них станів (фігурують в специфікаціях доступних формул) маємо $nm(\vartheta_{k\alpha}) = nm(\vartheta_\alpha) \cup vt_{\xi\alpha}$, $val(\vartheta_{k\alpha}) = val(\vartheta_\alpha) \cup vt_{\xi\alpha}$, $ud(\vartheta_{k\alpha}) = ud(\vartheta_\alpha)$. Позначимо $val(\vartheta_\alpha) \cup vt_{\xi\alpha}$ як $val_\alpha$, $ud(\vartheta_\alpha)$ як $ud_\alpha$.

Нехай для наявного стану $\alpha$ секвенції $\xi$ маємо $ud_\alpha \neq \varnothing$. Це означає, що в секвенціях $\xi_1,\ldots, \xi_n$ маємо нерозподілені імена стану $\alpha$. За допомогою Ed однаковим чином робимо для кожного $\xi_1,\ldots, \xi_n$ всеможливі розподіли імен $ud_\alpha$ на означені та неозначені. Це дає побудову однакових піддерев висоти $|ud_\alpha|$ з вершинами $\xi_1,\ldots, \xi_n$, що дає $m_\alpha = 2^{|ud_\alpha|}$ наступників $\eta^\alpha_{j1},\ldots,\eta^\alpha_{jm_\alpha}$ кожної з секвенцій $\xi_j \in \{\xi_1,\ldots, \xi_n\}$ з множинами $Vn_{\alpha k} \subseteq ud_\alpha$, де $k \in \{1,\ldots, m\}$, нових означених імен стану $\alpha$. Будемо вважати $Vn_{\alpha 1} = \varnothing$. Якщо $val_\alpha = \varnothing$, то для всіх $\eta^\alpha_{j1}$, де $j \in \{1,\ldots, n\}$ (для них немає означених імен стану $\alpha$), робимо первісне означення – додаємо ${}_{\alpha|\!-}Ez$ для нового тотально неістотно го $z$, що дає $Vn_{\alpha 1} = \{z\}$. Тоді в $\eta^\alpha_{jk}$ маємо множину означених імен $val_\alpha \cup Vn_{\alpha k}$.

Розподіли імен на означені й неозначені робимо для кожного наявного стану $\beta$ секвенції $\xi$, для якого $ud_\beta \neq \varnothing$. При цьому розподіл для наступного стану з нерозподіленими іменами робимо для кожної секвенції, отриманої в результаті розподілу для попереднього такого стану.

Після завершення розподілів у кожній з так отриманих секвенцій-наступників секвенції $\xi_0$ застосовуємо $\exists_F$-форму для кожного означеного імені кожного наявного стану. Далі в цих секвенціях-наступниках виконуємо форми ${}_{\dashv}\Box$ (форми ${}_{\dashv}\Box\uparrow$ та ${}_{\dashv}\Box\downarrow$ для числень ТмМС), після них – форми ${}_{\vdash}\Box$ (форми ${}_{\vdash}\Box\uparrow$ та ${}_{\vdash}\Box\downarrow$ для числень ТмМС).

Побудова секвенційного дерева може завершуватися або не завершуватися.

Якщо побудова завершена позитивно, то маємо замкнене дерево.

Якщо побудова завершена негативно (можливо лише при виведенні скінченної секвенції), то маємо скінченне незамкнене дерево. Якщо побудова не завершується, то маємо нескінченне незамкнене дерево; таке дерево має хоча б один нескінченний шлях (лема Кеніга). Отже, якщо побудова завершена негативно або не завершується, то в дереві існує незамкнений шлях. Кожна з формул початкової секвенції $\Sigma$ зустрінеться на цьому шляху і стане доступною.

**Теорема 5** (коректності). Якщо секвенція ${}_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ вивідна, то $\Gamma \models \Delta$.

Нехай ${}_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ вивідна, тоді для неї побудоване замкнене секвенційне дерево. Усі його листи – замкнені секвенції, тому для кожного такого листа ${}_{\vdash}X_{\dashv}Z$ маємо $X \models Z$. Рух від листів дерева до його кореня здійснюється за допомогою секвенційних форм. За теоремою 4 при переході від засновків форм до висновків зберігається відношення $\models$. Тому для кожної вершини секвенційного дерева ${}_{\vdash}\Lambda_{\dashv}K$ маємо $\Lambda \models K$. Зокрема, для секвенції ${}_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ – кореня дерева – теж маємо $\Gamma \models \Delta$.

## 5. Теорема про контрмодель. Теорема повноти

Для доведення повноти секвенційних числень модальних логік використаємо метод систем модельних множин.

Система модельних множин – це пара $(\{H_\alpha \mid \alpha \in S\}, M)$, де кожна $H_\alpha$ – модельна множина стану $\alpha$, $M$ – схема моделей світу, яка задається $R$. Для множин $H_\alpha$ задаємо $Un_\alpha = unv(H_\alpha)$ та $W_\alpha = nm(H_\alpha) \setminus Un_\alpha$.

Модельна множина стану $H_\alpha$ визначається умовою коректності та умовами переходу. Умова коректності індукується умовою замкненості секвенції:

MC) не існує $Rs$-$Un_\alpha$-еквівалентних формул Φ та Ψ: ${}_{\alpha|-}\Phi \in H_\alpha$ та ${}_{\alpha-|}\Psi \in H_\alpha$.

Умови переходу індуковані виконанням відповідних форм. Вони формулюються однотипно для форм еквівалентних перетворень та форм спрощення.

Наведемо для прикладу умови MRU, MR∃R та MR☐.

MRU) за умови $y \in \nu(\Phi)$ маємо:

$${}_{\alpha|-}R^{y,\bar{v}}_{z,\bar{u}}(\Phi) \in H_\alpha \Rightarrow {}_{\alpha|-}R^{\bar{v}}_{\bar{u}}(\Phi) \in H_\alpha;$$

$${}_{\alpha-|}R^{y,\bar{v}}_{z,\bar{u}}(\Phi) \in H_\alpha \Rightarrow {}_{\alpha-|}R^{\bar{v}}_{\bar{u}}(\Phi) \in H_\alpha;$$

MR∃R) ${}_{\alpha|-}R^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(\exists x\Phi) \in H_\alpha \Rightarrow$

$$\Rightarrow {}_{\alpha|-}R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi) \in H_\alpha;$$

$${}_{\alpha-|}R^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(\exists x\Phi) \in H_\alpha \Rightarrow {}_{\alpha-|}R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi) \in H_\alpha;$$

MR☐) ${}_{\alpha|-}R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Box\Phi) \in H_\alpha \Rightarrow {}_{\alpha|-}\Box R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi) \in H_\alpha;$

$${}_{\alpha-|}R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Box\Phi) \in H_\alpha \Rightarrow {}_{\alpha-|}\Box R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi) \in H_\alpha.$$

Для форм декомпозиції формул та елімінації кванторів маємо:

M¬) ${}_{\alpha|-}\neg\Phi \in H_\alpha \Rightarrow {}_{\alpha-|}\Phi \in H_\alpha$;

${}_{\alpha-|}\neg\Phi \in H_\alpha \Rightarrow {}_{\alpha|-}\Phi \in H_\alpha$;

M∨) ${}_{\alpha|-}\Phi\vee\Psi \in H_\alpha \Rightarrow {}_{\alpha|-}\Phi \in H_\alpha$ або ${}_{\alpha|-}\Psi \in H_\alpha$;

${}_{\alpha-|}\Phi\vee\Psi \in H_\alpha \Rightarrow {}_{\alpha-|}\Phi \in H_\alpha$ і ${}_{\alpha-|}\Psi \in H_\alpha$;

M∃) ${}_{\alpha|-}\exists x\Phi \in H_\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow$ існує $y \in W_\alpha$: ${}_{\alpha|-}R^{x}_{y}(\Phi) \in H_\alpha$;

${}_{\alpha-|}\exists x\Phi \in H_\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow {}_{\alpha-|}R^{x}_{y}(\Phi) \in H_\alpha$ для всіх $y \in W_\alpha$;

M∃R) ${}_{\alpha|-}R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi) \in H_\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow$ існує $y \in W_\alpha$: ${}_{\alpha|-}R^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(\Phi) \in H_\alpha$;

${}_{\alpha-|}R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi) \in H_\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow {}_{\alpha-|}R^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(\Phi) \in H_\alpha$ для всіх $y \in W_\alpha$;

Для форм елімінації ☐ маємо:

M☐) ${}_{\alpha|-}\Box\Phi \in H_\alpha \Rightarrow {}_{\beta|-}\Phi \in H_\beta$ для всіх $\beta \in S$ таких, що $\alpha \rhd \beta$;

${}_{\alpha-|}\Box\Phi \in H_\alpha \Rightarrow {}_{\beta-|}\Phi \in H_\beta$ для деякого $\beta \in S$ такого, що $\alpha \rhd \beta$.

У випадку ТмМС маємо:

M☐↑) ${}_{\alpha|-}\Box\uparrow\Phi \in H_\alpha \Rightarrow {}_{\beta|-}\Phi \in H_\beta$ для всіх $\beta \in S$ таких, що $\alpha \rhd \beta$;

${}_{\alpha-|}\Box\uparrow\Phi \in H_\alpha \Rightarrow {}_{\beta-|}\Phi \in H_\beta$ для деякого $\beta \in S$ такого, що $\alpha \rhd \beta$;

M☐↓) ${}_{\alpha|-}\Box\downarrow\Phi \in H_\alpha \Rightarrow {}_{\beta|-}\Phi \in H_\beta$ для всіх $\beta \in S$ таких, що $\beta \rhd \alpha$;

${}_{\alpha-|}\Box\downarrow\Phi \in H_\alpha \Rightarrow {}_{\beta-|}\Phi \in H_\beta$ для деякого $\beta \in S$ такого, що $\beta \rhd \alpha$.

**Теорема 6** (про контрмодель). Нехай ℘ – незамкнений шлях в секвенційному дереві, $H_\alpha$ – множина всіх специфікованих формул стану α на шляху ℘, $M$ – об'єднання усіх схем моделей світу секвенцій шляху ℘, $\mathrm{H}_M = (\{H_\alpha \mid \alpha \in S\}, M)$, $W = \bigcup_{\alpha \in S} W_\alpha$, де кожна $W_\alpha$ – множина означених предметних імен формул $H_\alpha$. Тоді існують ТМС $M = (S, R, A, Im)$ та $\delta \in {}^{V}\!A$ з $asn(\delta) = W$:

${}_{\alpha|-}\Phi \in H_\alpha \Rightarrow \Phi_\alpha(\delta) = T$; ${}_{\alpha-|}\Phi \in H_\alpha \Rightarrow \Phi_\alpha(\delta) = F$.

Для переходу від нижчої вершини шляху ℘ до вищої використовується одна з базових секвенційних форм. Переходи згідно таких форм відповідають пунктам визначення системи модельних множин. Кожна непримітивна формула на шляху ℘ рано чи пізно буде розкладена згідно відповідної форми. Всі секвенції шляху ℘ незамкнені, тому для них не виконуються умови замкненості C, звідки для всіх α виконується умова коректності MC визначення системи модельних множин.

Візьмемо деяку множину $A$ таку, що $|A| = |W|$, та ін'єктивну $\delta \in {}^{V}\!A$ з $asn(\delta) = W$. Така δ є бієкцією $W$ на $A$, яка розпадається на бієкції $\delta_\alpha : W_\alpha \to A_\alpha$. Кожна $A_\alpha$ продубльовує $W_\alpha$.

Задамо значення базових предикатів на $\delta$ та на даних вигляду $\mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\delta)$:

$_{\alpha|-}Ey \in H_\alpha \Rightarrow Ey(\delta_\alpha) = T$;

$_{\alpha-|}Ey \in H_\alpha \Rightarrow Ey(\delta_\alpha) = F$;

$_{\alpha|-}p \in H_\alpha \Rightarrow p_\alpha(\delta) = T$;

$_{\alpha-|}p \in H_\alpha \Rightarrow p_\alpha(\delta) = F$;

$_{\alpha|-}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(p) \in H_\alpha \Rightarrow p_\alpha(\mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\delta)) = R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(p)_\alpha(\delta) = T$;

$_{\alpha-|}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(p) \in H_\alpha \Rightarrow p_\alpha(\mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\delta)) = R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(p)_\alpha(\delta) = F$.

Для інших $d \in A_\alpha^{W_\alpha}$ значення $p_\alpha(d)$ задаємо довільним чином, враховуючи $\nu(p)$.

Для примітивних формул твердження теореми випливає з визначення значень базових предикатів. Далі доводимо традиційно: індукцією за складністю формули згідно побудови системи модельних множин. Наведемо для прикладу доведення для пп. MR∃R, M∃, M∃R, M☐.

MR∃R) нехай $_{\alpha|-}R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\exists x\Phi) \in H_\alpha$. Тоді $_{\alpha|-}R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi) \in H_\alpha$ за визначенням $H_M$. За припущенням індукції $R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)_\alpha(\delta) = T$, звідки $R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\exists x\Phi)_\alpha(\delta) = T$.

Нехай $_{\alpha-|}R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\exists x\Phi) \in H_\alpha$. Тоді маємо $_{\alpha-|}R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi) \in H_\alpha$ за визначенням $H_M$. За припущенням індукції маємо $R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)_\alpha(\delta) = F$, тому $R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\exists x\Phi)_\alpha(\delta) = F$.

M∃) нехай $_{\alpha|-}\exists x\Phi \in H_\alpha$. За визначенням $H_M$ існує $y \in W_\alpha$ таке: $_{\alpha|-}R_y^x(\Phi) \in H_\alpha$. За припущенням індукції $R_y^x(\Phi)_\alpha(\delta) = T$. Звідси $\Phi_\alpha(\delta\nabla x \mapsto \delta(y)) = T$. Але $\delta(y) \in A_\alpha$ згідно $y \in W_\alpha$, тому для $a = \delta(y) \in A_\alpha$ маємо $\Phi_\alpha(\delta\nabla x \mapsto a) = T$, звідки $(\exists x\Phi)_\alpha(\delta) = T$.

Нехай $_{\alpha-|}\exists x\Phi \in H_\alpha$. За визначенням $H_M$ тоді $_{\alpha-|}R_y^x(\Phi) \in H_\alpha$ для всіх $y \in W_\alpha$. За припущенням індукції $R_y^x(\Phi)_\alpha(\delta) = F$ для всіх $y \in W_\alpha$. Звідси $\Phi_\alpha(\delta\nabla x \mapsto \delta(y)) = F$ для всіх $y \in W_\alpha$. Кожне $b \in A_\alpha$ має вигляд $b = \delta(y)$ для деякого $y \in W_\alpha$, адже $\delta$ визначає бієкцію $\delta_\alpha : W_\alpha \to A_\alpha$. Звідси $\Phi_\alpha(\delta\nabla x \mapsto b) = F$ для всіх $b \in A_\alpha$, тому $(\exists x\Phi)_\alpha(\delta) = F$.

M∃R) нехай $_{\alpha|-}R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi) \in H_\alpha$. За визначенням $H_M$ існує $y \in W_\alpha$: $_{\alpha|-}R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi) \in H_\alpha$. За припущенням індукції $R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi)_\alpha(\delta) = T$. Звідси отримуємо $\Phi_\alpha(\delta\nabla\bar{u} \mapsto \delta(\bar{v})\nabla x \mapsto \delta(y)) = T$. Згідно $y \in W_\alpha$ маємо $\delta(y) \in A_\alpha$, тому отримуємо $\Phi_\alpha(\delta\nabla\bar{u} \mapsto \delta(\bar{v})\nabla x \mapsto a) = T$ для $a = \delta(y)$, звідки $R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)_\alpha(\delta) = T$.

Нехай $_{\alpha-|}R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi) \in H_\alpha$. За визначенням $H_M$ тоді $_{\alpha-|}R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi) \in H_\alpha$ для всіх $y \in W_\alpha$. За припущенням індукції для всіх $y \in W_\alpha$ маємо $R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi)_\alpha(\delta) = F$, звідси для всіх $y \in W_\alpha$ $\Phi_\alpha(\delta\nabla\bar{u} \mapsto \delta(\bar{v})\nabla x \mapsto \delta(y)) = F$ Кожне $b \in A_\alpha$ має вигляд $b = \delta(y)$ для деякого $y \in W_\alpha$, адже $\delta$ задає бієкцію $\delta_\alpha : W_\alpha \to A_\alpha$. Звідси $\Phi_\alpha(\delta\nabla\bar{u} \mapsto \delta(\bar{v})\nabla x \mapsto a) = F$ для всіх $b \in A_\alpha$, тому $R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)_\alpha(\delta) = F$.

M☐) нехай $_{\alpha|-}\Box\Phi \in H_\alpha$. За визначенням $H_M$ маємо $_{\beta|-}\Phi \in H_\beta$ для всіх $\beta \in S$ таких, що $\alpha \rhd \beta$. За припущенням індукції $\Phi_\beta(\delta) = T$ для всіх $\beta$ таких, що $\alpha \rhd \beta$. Звідси за визначенням $\Box$ отримуємо $(\Box\Phi)_\alpha(\delta) = T$.

Нехай $_{\alpha-|}\Box\Phi \in H_\alpha$. За визначенням $H_M$ тоді $_{\beta-|}\Phi \in H_\beta$ для деякого $\beta \in S$: $\alpha \rhd \beta$. За припущенням індукції $\Phi_\beta(\delta) = F$, тому $(\Box\Phi)_\alpha(\delta) = F$ за визначенням $\Box$.

Із теореми про контрмодель отримуємо теорему повноти.

**Теорема 7.** Нехай $\Gamma \models \Delta$. Тоді секвенція $_{|-}\Gamma_{-|}\Delta$ вивідна.

Припустимо супротивне: $\Gamma \models \Delta$, тобто $\Gamma\ {}_M\!\models \Delta$ для кожної узгодженої ТМС $M$, проте секвенція $\Sigma = {}_{|-}\Gamma_{-|}\Delta$ невивідна. Тоді в дереві для $\Sigma$ існує незамкнений шлях. За теоремою 6 $H_M = (\{H_\alpha \mid \alpha \in S\}, M)$ –

система модельних множин, тому існують ТМС $M = (S, R, A, Jm)$ та $\delta \in {}^{V}A$ такі:

$${}_{\alpha|-}\Phi \in H_{\alpha} \Rightarrow \Phi_{\alpha}(\delta) = T \text{ та } {}_{\alpha-|}\Phi \in H_{\alpha} \Rightarrow \Phi_{\alpha}(\delta) = F.$$

Зокрема, це правильно для формул секвенції ${}_{|-}\Gamma_{-|}\Delta$. Тому для всіх $\Phi^{\alpha} \in \Gamma$ маємо $\Phi_{\alpha}(\delta) = T$ та для всіх $\Psi^{\beta} \in \Delta$ маємо $\Psi_{\beta}(\delta) = F$. Це заперечує $\Gamma_{M}|= \Delta$, тому $\Gamma \not\models \Delta$. Отримали суперечність. Отже, припущення про невивідність ${}_{|-}\Gamma_{-|}\Delta$ невірне, що й доводить теорему.

## Висновки

Досліджено нові програмно-орієнтовані логічні формалізми модального типу – чисті першопорядкові композиційно-номінативні модальні логіки часткових предикатів без обмеження монотонності. Описано семантичні моделі та мови таких логік, розглянуто взаємодію модальних композицій із реномінаціями та кванторами, введено відношення наслідку для формул в даному стані. Наведено властивості відношення логічного наслідку для множин специфікованих станами формул, описано властивості елімінації модальностей для різних відношень досяжності. Для загальних транзиційних та темпоральних модальних логік немонотонних предикатів запропоновано числення секвенційного типу. Описано різновиди таких числень для різних відношень досяжності, для цих числень наведено базові секвенційні форми та умови замкненості секвенцій. Детально описано поетапну процедуру побудови виведення (секвенційного дерева) в цих численнях, для них доведено теорему коректності та теорему про існування контрмоделі для незамкненого шляху в секвенційному дереві. На основі теореми про існування контрмоделі доведено теорему повноти.


1. *Нікітченко М.С., Шкільняк С.С.* Прикладна логіка. К.: ВПЦ Київський університет, 2013. 278 с.
2. *Cocchiarella N.B., Freund M.A.* Modal logic. Oxford University Press, 2008. 267 p.
3. *Нікітченко М.С., Шкільняк О.С., Шкільняк С.С.* Чисті першопорядкові логіки квазіарних предикатів. *Проблеми програмування.* 2016. № 2–3. С. 73–86.
4. *Шкільняк О.С.* Семантичні властивості композиційно-номінативних модальних логік. *Проблеми програмування.* 2009. № 4. С. 11–23.
5. *Шкільняк О.С.* Композиційно-номінативні модальні логіки функціонально-екваційного рівня. *Проблеми програмування.* 2010. № 2–3. С. 42–47.
6. *Шкільняк О.С.* Транзиційні композиційно-номінативні модальні логіки та їх числення. Наук. записки НаУКМА. Серія: Комп’ютерні науки. 2013. Т. 151. С. 48–54.
7. *Шкільняк О.С.* Транзиційні модальні логіки немонотонних квазіарних предикатів. *Компьютерная математика*. 2014. В. 2. С. 99–110.
8. *Шкільняк О.С.* Модальні логіки немонотонних часткових предикатів. Вісник Київського ун-ту. Серія: фіз.-мат. науки. 2015. Вип. 3. С. 141–147.
9. *Shkilniak O.* Modal Logics of Partial Predicates without Monotonicity Restriction. Workshop on Foundations of Informatics: Proceedings FOI-2015. – Chisinau, Moldova. P. 198–211.


## References


1. NIKITCHENKO M. and SHKILNIAK S. (2013). Applied logic. Kyiv: VPC Kyivskyi Universytet (in ukr).
2. COCCHIARELLA N. and FREUND M. (2008). Modal logic. Oxford University Press.
3. NIKITCHENKO M., SHKILNIAK O. and SHKILNIAK, S. (2016). Pure first-order logics of quasiary predicates. In Problems in Progamming. N 2–3, P. 73–86 (in ukr).
4. SHKILNIAK O. (2009). Semantic properties of composition nominative modal logics. In Problems in Progamming. N 4, P. 11–23 (in ukr).
5. SHKILNIAK, O. (2010). Composition nominative modal logics of functional-equational level. Problems in Progamming. N 2–3, P. 42–47 (in ukr).
6. SHKILNIAK O. (2013). Transitional composition-nominative modal logics and their calculi. In Scientific Notes of NaUKMA. Series: Computer sciences. **151**, P. 99–110 (in ukr).

7. SHKILNIAK O. (2014). Transitional modal logics of non-monotone quasiary predicates. In Computer mathematics. **2**, P. 99–110 (in ukr).
8. SHKILNIAK O. (2015). Modal logics of non-monotone partial predicates. In Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics. **3**, P. 141–147 (in ukr).
9. SHKILNIAK O. (2015). Modal Logics of Partial Predicates without Monotonicity Restriction. In Workshop on Foundations of Informatics: Proceedings FOI-2015. Chisinau, Moldova. P. 198–211.


Одержано 20.04.2017

***Про авторів:***


*Шкільняк Оксана Степанівна*,
кандидат фізико-математичних наук,
доцент, доцент кафедри
інформаційних систем.
Кількість наукових публікацій в
українських виданнях – 84, у тому числі
у фахових виданнях – 32.
Кількість наукових публікацій в
зарубіжних виданнях – 9.
http://orcid.org/0000-0003-4139-2525.

*Касьянюк Веда Станіславівна,*
кандидат фізико-математичних наук,
завідувач науково-дослідного
сектору теоретичної кібернетики.
Кількість наукових публікацій в
українських виданнях – 129, у тому числі
у фахових виданнях – 51.
Кількість наукових публікацій в
зарубіжних виданнях – 7.
http://orcid.org/0000-0003-3268- 303X.

*Малютенко Людмила Миколаївна,*
провідний інженер науково-дослідного
сектору теоретичної кібернетики.
Кількість наукових публікацій в
українських виданнях – 15, у тому числі
у фахових виданнях – 7.
Кількість наукових публікацій в
зарубіжних виданнях – 1.
http://orcid.org/0000-0002-3513-5533.


***Місце роботи авторів*:**


Київський національний університет
імені Тараса Шевченка,
01601, Київ, вул. Володимирська, 60.
Тел.: (044) 259 0511, (050) 356 4875.
E-mail: me.oksana@gmail.com