СИСТЕМНІ ДОСЛІДЖЕННЯ
ТА КОМПЛЕКСНІ ПРОБЛЕМИ ЕНЕРГЕТИКИ

ISSN 2522-4344 (Online), ISSN 1562-8965 (Print). The problems of general energy, 2020, 3(62): 6–21
doi: https://doi.org/10.15407/pge2020.03.006

УДК 622.324

М.М. КУЛИК, академік НАН України, д-р техн. наук, професор, ORCID: 0000-0002-5582-7027
Інститут загальної енергетики НАН України, вул. Антоновича, 172, м. Київ, 03150, Україна

МОДИФІКАЦІЯ СТРУКТУРИ МОДЕЛІ ГОША В МІЖГАЛУЗЕВОМУ АНАЛІЗІ

Запропоновано і досліджено модифіковану модель випуску у системі input-output на основі даних доданої вартості (модифікована модель Гоша). Доведені її збалансованість та відсутність методичних похибок. Завдяки тому, що модифікована модель Гоша ґрунтується на доданій вартості, точність її прогнозів повинна бути не гіршою за точність класичної моделі Леонтьєва визначення випуску на базі кінцевого споживання.

З використанням нової матриці в модифікованій моделі Гоша встановлені нові математичні залежності, які зв'язують показники кінцевого споживання та доданої вартості в моделі Леонтьєва та в модифікованій моделі Гоша. Встановлено також, що відповідні діагональні коефіцієнти матриць, включаючи обернені, що використовуються в моделі Леонтьєва та модифікованій моделі Гоша, є ідентичними.

Ключові слова: модифікована модель Гоша, input-output, модель Леонтьєва, додана вартість, кінцеве споживання.

Метод міжгалузевого балансу займає особливе місце в економічній науці. При певному поєднанні із засобами макро- та мікроекономічного аналізу цей апарат формує цілісну методологію та забезпечує комплексний інструментарій наукових та прикладних досліджень в економічній сфері, що вже сьогодні призвело до виняткових результатів. Використовуючи метод міжгалузевого балансу, досліджуються і вирішуються проблеми функціонування та розвитку різнорідних, складних об'єктів, систем та явищ у регіональному та планетарному аспектах: економіка в цілому, енергетика, соціальна сфера, екологія, зміна клімату, стихійні лиха, техногенні катастрофи та ін.

У нинішньому стані метод input-output отримав найширше застосування у наукових сферах усіх промислово розвинених країн. У таких країнах урядові статистичні відомства зобов'язані формувати таблиці input-output за звітні періоди, що вказує на особливе значення, яке національні уряди надають цьому підходу. Крім того, методи input-output активно використовуються для виконання проектів різних міжнародних та національних економічних, фінансових, бізнес-структур та організацій.

Метод міжгалузевого балансу базується на сучасному математичному апараті. Показовим у цьому відношенні є, зокрема те, що матриця ***(I-A)*** із моделі випуску input-output у складі підкласу матриць із спеціальними властивостями увійшла до загальної теорії матриць під назвою «матриця Леонтьєва».

Хоча основи теорії міжгалузевого балансу були започатковані та розроблені майже століття тому, її актуальність та популярність посилюються через високу ефективність цього інструментарію.

Протягом усього часу від початку свого розвитку до сих пір математичним підґрунтям апарату input-output були і залишаються дві надійні системи рівнянь: модель Леонтьєва визначення випуску за заданим кінцевим споживанням та модель Гоша визначення випуску через додану вартість.

Маючи у розпорядженні модель випуску на базі кінцевого споживання Леонтьєва [1], А. Гош [2] розробив у системі моделей input-output модель випуску, що ґрунтується на використанні доданої вартості. З тих пір дискусії навколо цієї моделі не припиняються.

За цей час за моделлю Гоша напрацьована величезна література. Обговорення та пропозиції вже не обмежуються моделлю випуску на базі доданої вартості. De March та ін. [3] стверджують, що моделі Гоша можуть використовуватись для вивчення цінових і вартісних ефектів або форвардних зв'язків галузей. Надаються досить жорсткі якісні оцінки цій моделі. Зокрема, Oosterhaven J. [4] підкреслює її неправдоподібність. Відповідно до думки de Mesnarda [5], модель Гоша взагалі не викликає інтересу. Dietzenbacher [6] робив спроби встановити зв'язки між моделлю Гоша та ціновою моделлю Леонтьєва. Davar [7] заперечує таку можливість і стверджує, що модель Гоша не може бути рівнозначною моделі input-output Леонтьєва.

Деякі із наведених критичних оцінок викликають навіть подив своїм радикалізмом. Можливо, частина з них була зумовлена надмірними надіями їх авторів на використання цієї моделі для інших задач (наприклад, цінових), що потім не виправдились. Але в економетричному плані модель Гоша є двійником і конкурентом моделі випуску Леонтьєва, і використовувати її можна і доцільно лише для визначення випуску. Для врівноважених структур input-output (IO) ці моделі дають адекватні (співпадаючі) результати (див. далі). У врівноваженій IO структурі забезпечені два баланси: баланс випуску і баланс витрат. В. Леонтьєв використав баланс випуску для побудови своєї класичної насьогодні моделі на базі показників кінцевого споживання. Цілком логічним і навіть природним з точки зору економетрії було побудувати ще одну модель визначення випуску продукції в IO системі, яка грунтувалась би не на кінцевому споживанні, а на доданій вартості, що і зробив А. Гош. Якби це не було реалізовано ним, цю модель побудував би хтось інший.

Такий метод визначення обсягів випуску продукції має низку переваг порівняно із класичним. Показники прогнозу доданої вартості, на відміну від кінцевого споживання, систематично розробляються для державних цілей статистичними службами і можуть використовуватись у структурах input-output без змін або з незначною адаптацією. Таким чином, у разі їх застосування у моделі Гоша немає необхідності в додаткових дослідженнях для формування вхідних даних. У той же час статистичні служби навіть у розвинених країнах не розробляють прогнози щодо кінцевого споживання. Більш того, інформаційна база статистичних служб деяких із цих країн не завжди надає навіть фактичні дані, необхідні для формування кінцевого споживання існуючої моделі випуску. Цю проблему доводиться вирішувати фахівцям, які використовують інструменти міжгалузевого балансу для визначення випуску продукції через кінцеве споживання. Це призводить до значного збільшення трудомісткості та часу на дослідження. Але ще важливішим є той факт, що значно бідніша статистична база, застосована до класичної моделі Леонтьєва, повинна призводити до більших похибок у прогнозах кінцевого споживання порівняно з прогнозами доданої вартості. Це, у свою чергу, призводить до того, що точність прогнозування випуску для моделі Гоша очікується помітно вищою, ніж точність моделі Леонтьєва.

Таким чином, є підстави стверджувати, що математична модель випуску, побудована на базі доданої вартості, щонайменше нічим не повинна поступатися моделі на основі кінцевого споживання.

1. Діюча структура моделі Гоша і постановка задачі

Модель Гоша, як і модель Леонтьєва, була побудована на структурі матриць input-output, яка надана на схемі (1)

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ i \\ j \\ n \end{array}\begin{array}{c} \quad 1 \quad\; i \;\; Z \;\; j \quad n \\ \begin{bmatrix} z_{11} & z_{1i} & z_{1j} & z_{1n} \\ z_{i1} & z_{ii} & z_{ij} & z_{in} \\ z_{j1} & z_{ji} & z_{jj} & z_{jn} \\ z_{n1} & z_{ni} & z_{nj} & z_{nn} \end{bmatrix} \end{array}; \begin{array}{c} f \\ \begin{bmatrix} f_1 \\ f_i \\ f_j \\ f_n \end{bmatrix} \end{array}; \begin{array}{c} x \\ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_i \\ x_j \\ x_n \end{bmatrix} \end{array}. \qquad (1)$$

$$\begin{bmatrix} v_1 & v_i & v_j & v_n \end{bmatrix} \; v'$$

$$\begin{bmatrix} z_1 & z_i & z_j & z_n \end{bmatrix} \; z' = x'$$

Тут $i, j = \overline{1, n}$ – нумерація секторів, z_{ij} – елементи матриці проміжних продажів Z; f, x, v, z – вектори кінцевого споживання, обсягу випуску, доданої вартості та загальних витрат відповідно. У врівноважених таблицях (1) завжди забезпечені, як відомо, залежності:

$$z_i = x_i, \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{n} v_i = \sum_{i=1}^{n} f_i, \qquad (3)$$

а також баланс випуску

$$\sum_{j=1}^{n} z_{ij} + f_i = x_i \qquad (4)$$

і баланс витрат

$$\sum_{i=1}^{n} z_{ij} + v_j = x_j. \qquad (5)$$

Привертаємо увагу на принципову необхідність забезпечення залежностей (2)–(5) при побудові коректних моделей input-output.

Модель Гоша у сучасній формі та транскрипції Miller, Blair [8] має вигляд

$$(I - B')x = v, \qquad (6)$$

де матриця Гоша

$$B = \left[b_{ij}\right] = \left[z_{ij} / x_i\right], \quad i, j = \overline{1, n} \qquad (7)$$

або в розгорнутому стані

$$B = \begin{array}{c} \\ 1 \\ i \\ j \\ n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \mathbf{1} & \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{n} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{z_{11}}{x_1} & \frac{z_{1i}}{x_1} & \frac{z_{1j}}{x_1} & \frac{z_{1n}}{x_1} \\ \frac{z_{i1}}{x_i} & \frac{z_{ii}}{x_i} & \frac{z_{ij}}{x_i} & \frac{z_{in}}{x_i} \\ \frac{z_{j1}}{x_j} & \frac{z_{ji}}{x_j} & \frac{z_{jj}}{x_j} & \frac{z_{jn}}{x_j} \\ \frac{z_{n1}}{x_n} & \frac{z_{ni}}{x_n} & \frac{z_{nj}}{x_n} & \frac{z_{nn}}{x_n} \end{bmatrix} \end{array}. \qquad (8)$$

Для подальшого необхідно нагадати, що модель Леонтьєва визначення обсягів випуску продукції у монетарній формі має структуру

$$(I - A)x = f, \qquad (9)$$

де

$$A = \left[a_{ij}\right] = \left[z_{ij} / x_j\right], \quad i, j = \overline{1, n}. \qquad (10)$$

Порівняння моделей (6), (7) та (9), (10) викликає запитання, чому їх структура різко відрізняється через використання транспонованої матриці B'. Для чого потрібно формувати матрицю B, якщо вона не використовується в структурі моделі Гоша (6), (7). Відповіддю міг би слугувати той факт, що інакше не можна побудувати модель випуску на базі доданої вартості. Але це не так, бо симетричність балансів випуску (4) та витрат (5) таку можливість надає.

Тому метою даної статті є формування модифікованої моделі Гоша у вигляді, аналогічному моделі Леонтьєва (9), (10), а саме, у вигляді

$$(I - Q)x = \gamma. \qquad (11)$$

Використання моделі Гоша зі структурою (11) виключає можливу плутанину з формуванням і використанням матриці Гоша (8) і (що більш важливо) надає спрощення і певні перспективи в теоретичних дослідженнях, про деякі з них буде далі.

2. Модифікована структура моделі Гоша

Модифікована модель Гоша побудована з використанням рівняння (2) та балансу витрат (5). У розгорнутій формі баланс витрат має вигляд

$$\begin{aligned} z_{11} + z_{i1} + z_{j1} + z_{n1} + v_1 &= x_1, \\ z_{1i} + z_{ii} + z_{ji} + z_{ni} + v_i &= x_i, \\ z_{1j} + z_{ij} + z_{jj} + z_{nj} + v_j &= x_j, \\ z_{1n} + z_{in} + z_{jn} + z_{nn} + v_n &= x_n. \end{aligned} \qquad (12)$$

Для переведення системи (12) до векторно-матричної форми кожну із сум проміжних продажів z_{ij}; $i, j = \overline{1, n}$ надамо у тотожному вигляді

$$\begin{aligned} z_{11} + z_{i1} + z_{j1} + z_{n1} &= \frac{z_{11}}{x_1} x_1 + \frac{z_{i1}}{x_i} x_i + \frac{z_{j1}}{x_j} x_j + \frac{z_{n1}}{x_n} x_n, \\ z_{1i} + z_{ii} + z_{ji} + z_{ni} &= \frac{z_{1i}}{x_1} x_1 + \frac{z_{ii}}{x_i} x_i + \frac{z_{ji}}{x_j} x_j + \frac{z_{ni}}{x_n} x_n, \\ z_{1j} + z_{ij} + z_{jj} + z_{nj} &= \frac{z_{1j}}{x_1} x_1 + \frac{z_{ij}}{x_i} x_i + \frac{z_{jj}}{x_j} x_j + \frac{z_{nj}}{x_n} x_n, \\ z_{1n} + z_{in} + z_{jn} + z_{nn} &= \frac{z_{1n}}{x_1} x_1 + \frac{z_{in}}{x_i} x_i + \frac{z_{jn}}{x_j} x_j + \frac{z_{nn}}{x_n} x_n. \end{aligned} \qquad (13)$$

Після цього система рівнянь (12) набуває форму

$$\begin{bmatrix} \frac{z_{11}}{x_1} & \frac{z_{i1}}{x_i} & \frac{z_{j1}}{x_j} & \frac{z_{n1}}{x_n} \\ \frac{z_{1i}}{x_1} & \frac{z_{ii}}{x_i} & \frac{z_{ji}}{x_j} & \frac{z_{ni}}{x_n} \\ \frac{z_{1j}}{x_1} & \frac{z_{ij}}{x_i} & \frac{z_{jj}}{x_j} & \frac{z_{nj}}{x_n} \\ \frac{z_{1n}}{x_1} & \frac{z_{in}}{x_i} & \frac{z_{jn}}{x_j} & \frac{z_{nn}}{x_n} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_i \\ x_j \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_i \\ v_j \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_i \\ x_j \\ x_n \end{bmatrix}. \qquad (14)$$

Структура рівнянь (14) дозволяє представити систему залежностей (12) у векторно-матричному вигляді (11), що є метою статті, де матриця Q має елементи

$$q_{ij} = z_{ji} / x_j, \quad i, j = \overline{1, n}. \qquad (15)$$

Якщо виділити j-те рівняння із системи (14), ми відразу отримуємо баланс витрат (5). Тобто, модифікована модель випуску Гоша є збалансованою і тому не повинна мати методичних похибок.

Система рівнянь (11), (15) – це модифікована модель випуску Гоша в системі моделей input-output, яка грунтується не на кінцевому споживанні, а на доданій вартості.

Приклад. Можливості модифікованої моделі визначення випуску Гоша були досліджені з використанням (табл. 1) системи звітних таблиць input-output (Німеччина, 1995), яка наведена у De March та ін. [3, C. 483, 490 (версія A)].

Досліджено два варіанти розрахунків обсягів випуску. Відповідно до першого з них показники проміжних продажів Z, кінцеве споживання f і загальні витрати z вважались відомими. Були визначені показники випуску x, тобто, обсяги випуску визначались за допомогою моделі Леонтьєва (9), (10). Показники вектора x мали збігатися поелементно з показниками загальних витрат z (табл. 1). Попередньо обчислені матриці A і $(I\text{-}A)$ мали вигляд, наданий в табл. 2.

Таблиця 1. Звітна система input-output

Millions of Euro

		Agricul-ture	Manufac-turing	Construc-tion	Trade	Business services	Other services	Final demand	Output
		1	2	3	4	5	6	7	8
		Intermediate sales ***Z***						***f***	***x***
1	Agriculture	1131	25480	1	607	710	762	15219	43910
2	Manufacturing	7930	304584	64167	41082	11981	30360	619342	1079446
3	Construction	426	7334	3875	5296	23457	9155	196063	245606
4	Trade	3559	72717	14190	74399	10835	21008	343355	540063
5	Business services	3637	96115	31027	65755	193176	34223	268554	692487
6	Other services	1552	14986	1747	11225	15058	22070	442280	508918
Value added		25675	558230	130599	341699	437270	391340	***v’***	
Input, total		43910	1079446	245606	540063	692487	508918	***z’ = x’***	

Таблиця 2. Матриці ***A*** і (***I-A***)

	1	2	3	4	5	6
Matrix ***A***						
1	0,025757231	0,023604701	4,07156E-06	0,001123943	0,00102529	0,001497294
2	0,180596675	0,282166963	0,261259904	0,076068903	0,017301408	0,059655976
3	0,009701662	0,006794226	0,015777302	0,009806263	0,03387356	0,017989146
4	0,081052152	0,067365111	0,057775462	0,137759854	0,015646503	0,041279735
5	0,082828513	0,089041045	0,126328347	0,121754314	0,278959749	0,06724659
6	0,035345024	0,013883047	0,007113018	0,020784612	0,021744813	0,043366515
Matrix (***I-A***)						
1	0,974242769	–0,023604701	–4,07156E-06	–0,001123943	–0,00102529	–0,001497294
2	–0,180596675	0,717833037	–0,261259904	–0,076068903	–0,017301408	–0,059655976
3	–0,009701662	–0,006794226	0,984222698	–0,009806263	-0,03387356	–0,017989146
4	–0,081052152	–0,067365111	–0,057775462	0,862240146	–0,015646503	–0,041279735
5	–0,082828513	–0,089041045	–0,126328347	–0,121754314	0,721040251	–0,06724659
6	–0,035345024	–0,013883047	–0,007113018	–0,020784612	–0,021744813	0,956633485

У табл. 3 наведена схема визначення та обсяги випуску відповідно до моделі Леонтьєва [3].

Згідно другого варіанту показники проміжних продажів ***Z***, доданої вартості ***v*** та загальних витрат ***z*** вважалися відомими. Вихідний вектор ***x*** визначався за допомогою матриці $(\boldsymbol{I}\text{-}\boldsymbol{Q})^{-1}$ і вектора ***v***, тобто за схемою модифікованої моделі Гоша. Матриці ***Q*** і (***I-Q***) були розраховані та наведені в табл. 4.

У табл. 5 представлені вихідні дані для визначення випуску ***x*** на основі матриці $(\boldsymbol{I}\text{-}\boldsymbol{Q})^{-1}$ і вектора ***v***, тобто, була використана модифікована модель Гоша.

Розрахунки показують, що випуски ***x***, отримані з використанням моделі Леонтьєва та модифікованої моделі Гоша, є тотожними. Вони також повністю збігаються з фактичними даними виробництва, які наведені в табл. 1. Подібно до моделі Леонтьєва модифікована модель Гоша не має методичних похибок. Це демонструє її адекватність та конкурентність.

Той факт, що різні за своєю природою модель Леонтьєва та модифікована модель Гоша описують спільний набір засобів input-output, говорить про потенційну можливість існування певних зв’язків між ними.

Таблиця 3. Визначення випуску $\boldsymbol{x}$ за моделлю Леонтьєва

$(\boldsymbol{I}\text{-}\boldsymbol{A})^{-1}$							$\boldsymbol{f}$		$\boldsymbol{x}$
1,033872366	0,035030051	0,010021749	0,00508589	0,00302524	0,004423248		15219		43910
0,289644215	1,429151859	0,396130509	0,141973993	0,059632189	0,107342982		619342		1079446
0,020699544	0,019087986	1,028937758	0,02108126	0,050037004	0,024998564	x	196063	=	245606
0,126914744	0,121400291	0,106421353	1,178399633	0,035567713	0,063119829		343355		540063
0,1842067	0,207106708	0,250342948	0,223880455	1,412561607	0,126867916		268554		692487
0,049500711	0,029521911	0,021772349	0,033096857	0,034230316	1,051494704		442280		508918

Таблиця 4. Матриці $\boldsymbol{Q}$ і $(\boldsymbol{I}\text{-}\boldsymbol{Q})$

	1	2	3	4	5	6
Matrix $\boldsymbol{Q}$						
1	0,025757231	0,007346361	0,001734485	0,006589972	0,005252084	0,003049607
2	0,580277841	0,282166963	0,029860834	0,134645402	0,138796829	0,029446787
3	2,27739E-05	0,059444382	0,015777302	0,026274712	0,044805173	0,003432773
4	0,01382373	0,038058411	0,021562991	0,137759854	0,094954851	0,022056599
5	0,016169437	0,011099212	0,095506624	0,020062474	0,278959749	0,029588264
6	0,017353678	0,028125538	0,037275148	0,038899165	0,049420422	0,043366515
Matrix $(\boldsymbol{I}\text{-}\boldsymbol{Q})$						
1	0,974242769	–0,007346361	–0,001734485	–0,006589972	–0,005252084	–0,003049607
2	–0,580277841	0,717833037	–0,029860834	–0,134645402	–0,138796829	–0,029446787
3	–2,27739E-05	–0,059444382	0,984222698	–0,026274712	–0,044805173	–0,003432773
4	–0,01382373	–0,038058411	–0,021562991	0,862240146	–0,094954851	–0,022056599
5	–0,016169437	–0,011099212	–0,095506624	–0,020062474	0,721040251	–0,029588264
6	–0,017353678	–0,028125538	–0,037275148	–0,038899165	–0,049420422	0,956633485

Таблиця 5. Визначення випуску $\boldsymbol{x}$ згідно модифікованої моделі Гоша

$(\boldsymbol{I}\text{-}\boldsymbol{Q})^{-1}$							$\boldsymbol{v}$		$\boldsymbol{x}$
1,033872366	0,011782227	0,003700712	0,010318845	0,011680387	0,004270975		25675		43910
0,861148918	1,42915186	0,083892291	0,242647726	0,322837119	0,062617767		558230		1079446
0,056055609	0,090131447	1,028937758	0,048397544	0,088789725	0,010507428	x	130599	=	245606
0,062552972	0,071031715	0,046355579	1,178399633	0,174601906	0,035122334		341699		540063
0,047709843	0,038255286	0,141079514	0,045606122	1,412561607	0,046577344		437270		692487
0,051265554	0,05060816	0,051799302	0,059479759	0,093236936	1,051494704		391340		508918

3. Векторно-матричний зв'язок між доданою вартістю та кінцевим споживанням

Наявність моделей (11), (15) та (9), (10) з використанням залежності (2) дає можливість встановити взаємозв'язки між векторами $\boldsymbol{f}$ і $\boldsymbol{v}$ в системі input-output (1). Дійсно, використовуючи спочатку (9), (10), а потім (11), отримаємо залежність для $\boldsymbol{f}$:

$$\boldsymbol{f} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})^{-1}\boldsymbol{v}. \qquad (16)$$

Залежність для $\boldsymbol{v}$ отримується аналогічно

$$\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{f}. \qquad (17)$$

Зауважимо, що вирази (16), (17) задовольняють залежності (2), (3).

Вони пов'язують важливі показники кінцевого споживання та доданої вартості у векторно-матричній формі, які є вихідною інформацією для моделі Леонтьєва та модифікованої моделі Гоша, і це визначає взаємозв'язок між ними. Ці залежності неможливо було отримати раніше через відсутність матриці $\boldsymbol{Q}$.

4. Тотожність діагональних елементів матриць моделі Леонтьєва та модифікованої моделі Гоша

Порівняння матриць $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{Q}$, $(\boldsymbol{I}\text{-}\boldsymbol{A})$ і $(\boldsymbol{I}\text{-}\boldsymbol{Q})$, $(\boldsymbol{I}\text{-}\boldsymbol{A})^{-1}$ і $(\boldsymbol{I}\text{-}\boldsymbol{Q})^{-1}$, які надані у наведеному вище прикладі, демонструє повне співпадіння їх відповідних діагональних коефіцієнтів. Ми покажемо, що ця властивість притаманна не тільки матрицям, наведеним у прикладі, а й усім, що відповідають умовам (2)–(5) системи input-output (1).

Для матриць $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{Q}$ при $\boldsymbol{i = j}$ рівність

$$a_{ii} = q_{ii} \tag{18}$$

автоматично випливає із залежностей (10), (15).

Рівність відповідних діагональних елементів у матрицях $(\boldsymbol{I}\text{-}\boldsymbol{A})$ та $(\boldsymbol{I}\text{-}\boldsymbol{Q})$ випливає з (18).

Доведення тотожності діагональних елементів матриць $(\boldsymbol{I}\text{-}\boldsymbol{A})^{-1}$ та $(\boldsymbol{I}\text{-}\boldsymbol{Q})^{-1}$ набагато складніше, вимагає багато місця, і тому воно винесено у додаток.

ВИСНОВКИ

Діюча модель Гоша (6), (7) базується на використанні прогнозних даних доданої вартості. Прогнози валового внутрішнього продукту та доданої вартості давно, глибоко і регулярно (як правило, щорічно) розробляються різними національними та міжнародними економічними і фінансовими структурами, включаючи державні. Методи та точність таких прогнозів є вищого рівня порівняно з прогнозами кінцевого споживання, на яких базується модель Леонтьєва (9), (10). Тому з економетричної точки зору точність прогнозів випусків, зроблених за допомогою моделі Гоша, повинна бути щонайменше не гіршою, ніж та, що забезпечується класичною моделлю Леонтьєва.

Модифікована модель Гоша (11), (15) формально відрізняється від його діючої моделі (6), (7) наявністю нової матриці $\boldsymbol{Q}$. Однак ця відмінність є лише структурною особливістю, а в математичному плані зазначені моделі є тотожними. Дійсно, згідно (7) матриця $\boldsymbol{B}$ (8) має елемент $\boldsymbol{b}_{ji} = z_{ji}/\boldsymbol{x}_j$. З іншого боку, елемент $\boldsymbol{q}_{ij}$ матриці $\boldsymbol{Q}$ згідно (15) має таке саме значення, а саме, $\boldsymbol{q}_{ij} = z_{ji}/\boldsymbol{x}_j$. Тобто, має місце залежність $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{B'}$, що підтверджує математичну тотжність діючої і модифікованої моделі Гоша.

Разом з тим, на наш погляд, модифікована модель Гоша є більш привабливою і перспективною у порівнянні з діючою через наступні чинники. У ній фігурує (використовується) одна матриця ($\boldsymbol{Q}$) замість двох ($\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{B'}$), які фігурують у діючій моделі. Модифікована модель має структуру (на відміну від діючої), аналогічну структурі класичної моделі Леонтьєва. Ця особливість є логічною і навіть природною з огляду на те, що ці дві моделі грунтуються на дзеркальних властивостях структури input-output, якими є баланси випуску та витрат. Завдяки цьому модифікована модель є більш зрозумілою і зручною в користуванні. Але найбільш важливим є те, що використання матриці $\boldsymbol{Q}$ суттєво розширює можливості теоретичних досліджень в межах структур input-output.

Уже в межах даної статті завдяки побудові нової матриці $\boldsymbol{Q}$ у модифікованій моделі Гоша були виявлені нові залежності між векторами кінцевого споживання та доданої вартості, які можуть бути ефективно використані при балансуванні системи матриць input-output. Встановлено також, що відповідні матриці класичної моделі Леонтьєва та модифікованої моделі Гоша попарно мають ідентичні діагональні елементи, що є корисним при різноманітних аналітичних дослідженнях.

ДОДАТОК

Доведення тотожності діагональних елементів матриць $(\boldsymbol{I}\text{-}\boldsymbol{A})^{-1}$ та $(\boldsymbol{I}\text{-}\boldsymbol{Q})^{-1}$

Щоб довести цю тотожність, визначимо спочатку діагональні елементи $a_{ii}^{(-1)}$, $\boldsymbol{i, j} = \overline{1, n}$ матриці $(\boldsymbol{I}\text{-}\boldsymbol{A})^{-1}$, відповідні елементи $q_{ii}^{(-1)}$ матриця $(\boldsymbol{I}\text{-}\boldsymbol{Q})^{-1}$ і порівняємо їх між собою. Матрицю $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})$ використаємо у вигляді

$$\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} \quad 1 \quad & \quad i \quad & \quad j \quad & \quad n \quad \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\[2ex] i \\[2ex] j \\[2ex] n \end{array} & \begin{bmatrix} \dfrac{z_1 - z_{11}}{z_1} & -\dfrac{z_{1i}}{z_i} & -\dfrac{z_{1j}}{z_j} & -\dfrac{z_{1n}}{z_n} \\ -\dfrac{z_{i1}}{z_1} & \dfrac{z_i - z_{ii}}{z_i} & -\dfrac{z_{ij}}{z_j} & -\dfrac{z_{in}}{z_n} \\ -\dfrac{z_{j1}}{z_1} & -\dfrac{z_{ji}}{z_i} & \dfrac{z_j - z_{jj}}{z_j} & -\dfrac{z_{jn}}{z_n} \\ -\dfrac{z_{n1}}{z_1} & -\dfrac{z_{ni}}{z_i} & -\dfrac{z_{nj}}{z_j} & \dfrac{z_n - z_{nn}}{z_n} \end{bmatrix} \end{array}, \quad \boldsymbol{i, j} = \overline{1, n} \tag{A1}$$

і матрицю $(\boldsymbol{I}\text{-}\boldsymbol{Q})$ – в аналогічній формі

$$\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} \quad 1 \quad & \quad i \quad & \quad j \quad & \quad n \quad \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\[2ex] i \\[2ex] j \\[2ex] n \end{array} & \begin{bmatrix} \dfrac{z_1 - z_{11}}{z_1} & -\dfrac{z_{i1}}{z_i} & -\dfrac{z_{j1}}{z_j} & -\dfrac{z_{n1}}{z_n} \\ -\dfrac{z_{1i}}{z_1} & \dfrac{z_i - z_{ii}}{z_i} & -\dfrac{z_{ji}}{z_j} & -\dfrac{z_{ni}}{z_n} \\ -\dfrac{z_{1j}}{z_1} & -\dfrac{z_{ij}}{z_i} & \dfrac{z_j - z_{jj}}{z_j} & -\dfrac{z_{nj}}{z_n} \\ -\dfrac{z_{1n}}{z_1} & -\dfrac{z_{in}}{z_i} & -\dfrac{z_{jn}}{z_j} & \dfrac{z_n - z_{nn}}{z_n} \end{bmatrix} \end{array}, \quad \boldsymbol{i, j} = \overline{1, n}. \tag{A2}$$

Спочатку доведемо, що матриці (А1) та (А2) мають однакові детермінанти. Дійсно, детермінант матриці **(*I-A*)**

$$|\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = \Delta_a = \frac{1}{D(z_i)}|\boldsymbol{B}|, \qquad \text{(A3)}$$

де

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} z_1 - z_{11} & -z_{1i} & -z_{1j} & -z_{1n} \\ -z_{i1} & z_i - z_{ii} & -z_{ij} & -z_{in} \\ -z_{j1} & -z_{ji} & z_j - z_{jj} & -z_{jn} \\ -z_{n1} & -z_{ni} & -z_{nj} & z_n - z_{nn} \end{bmatrix}, \quad i, j = \overline{1, n}, \qquad \text{(A4)}$$

$$D(z_i) = z_1 \cdot z_2 \cdots z_i \cdots z_{n-1} \cdot z_n. \qquad \text{(A5)}$$

Для матриці **(*I-Q*)** справедлива залежність

$$|\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q}| = \Delta_q = \frac{1}{D(z_i)}|\boldsymbol{C}|, \qquad \text{(A6)}$$

в якій матриця ***C*** має вигляд

$$\boldsymbol{C} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ i \\ j \\ n \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & i & j & n \end{array} \\ \begin{bmatrix} z_1 - z_{11} & -z_{i1} & -z_{j1} & -z_{n1} \\ -z_{1i} & z_i - z_{ii} & -z_{ji} & -z_{ni} \\ -z_{1j} & -z_{ij} & z_j - z_{jj} & -z_{nj} \\ -z_{1n} & -z_{in} & -z_{jn} & z_n - z_{nn} \end{bmatrix} \end{array}, \quad i, j = \overline{1, n}. \qquad \text{(A7)}$$

Порівняння матриць (А4) та (А7) показує, що

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{B}'. \qquad \text{(A8)}$$

Тому детермінанти матриць ***B*** і ***C*** збігаються

$$|\boldsymbol{C}| = |\boldsymbol{B}|, \qquad \text{(A9)}$$

і згідно (А3) та (А6) детермінанти матриць **(*I-A*)** і **(*I-Q*)** рівні:

$$\Delta_a = \Delta_q. \qquad \text{(A10)}$$

Аналіз дає змогу визначити загалом і порівняти діагональні коефіцієнти матриць $(\boldsymbol{I}\text{-}\boldsymbol{A})^{-1}$ і $(\boldsymbol{I}\text{-}\boldsymbol{Q})^{-1}$.

Оскільки ми говоримо про діагональні коефіцієнти обернених матриць, то в подальшому аналізі алгебраїчні доповнення до цих елементів будуть збігатися з відповідними мінорами. Залежність для елемента ***ii*** матриці $(\boldsymbol{I}\text{-}\boldsymbol{A})^{-1}$ сформуємо, використовуючи класичний вираз для довільного елемента оберненої матриці, а саме

$$a_{ii}^{(-1)} = \frac{1}{\Delta_a}|\boldsymbol{F}|, \qquad \text{(A11)}$$

де матриця ***F*** має вигляд

$$\boldsymbol{F} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ j \\ n \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & j & n \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{z_1 - z_{11}}{z_1} & -\frac{z_{1j}}{z_j} & -\frac{z_{1n}}{z_n} \\ -\frac{z_{j1}}{z_1} & \frac{z_j - z_{jj}}{z_j} & -\frac{z_{jn}}{z_n} \\ -\frac{z_{n1}}{z_1} & -\frac{z_{jn}}{z_j} & \frac{z_n - z_{nn}}{z_n} \end{bmatrix} \end{array}, \quad i, j = \overline{1, n}. \qquad \text{(A12)}$$

Для мінора $|\boldsymbol{F}|$ справедлива залежність

$$|\boldsymbol{F}| = \frac{1}{P(z_i)} \cdot \begin{vmatrix} z_1 - z_{11} & -z_{1j} & -z_{1n} \\ -z_{j1} & z_j - z_{jj} & -z_{jn} \\ -z_{n1} & -z_{j1} & z_n - z_{nn} \end{vmatrix}, \quad i, j = \overline{1, n}, \qquad \text{(A13)}$$

тут

$$P(z_i) = z_1 \times \cdots \times z_{i-1} \times z_{i+1} \times \cdots \times z_n = D(z_i) / z_i. \qquad \text{(A14)}$$

Для визначення елемента ***ii*** оберненої матриці $(\boldsymbol{I}\text{-}\boldsymbol{Q})^{-1}$ використаємо залежність, аналогічну (А11)

$$q_{ii}^{(-1)} = \frac{1}{\Delta_q}|\boldsymbol{K}|, \qquad \text{(A15)}$$

в якій матриця ***K*** має вигляд

$$\boldsymbol{K} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ j \\ n \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & j & n \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{z_1 - z_{11}}{z_1} & -\frac{z_{j1}}{z_j} & -\frac{z_{n1}}{z_n} \\ -\frac{z_{1j}}{z_1} & \frac{z_j - z_{jj}}{z_j} & -\frac{z_{nj}}{z_n} \\ -\frac{z_{1n}}{z_1} & -\frac{z_{jn}}{z_j} & \frac{z_n - z_{nn}}{z_n} \end{bmatrix} \end{array}, \quad i, j = \overline{1, n}. \qquad \text{(A16)}$$

Мінор $|\boldsymbol{K}|$ визначається аналогічно (А11), а саме

$$|\boldsymbol{K}| = \frac{1}{P(z_i)} \cdot \begin{vmatrix} z_1 - z_{11} & -z_{j1} & -z_{n1} \\ -z_{1j} & z_j - z_{jj} & -z_{nj} \\ -z_{1n} & -z_{jn} & z_n - z_{nn} \end{vmatrix}, \quad i, j = \overline{1, n}. \qquad \text{(A17)}$$

Оскільки у правих частинах виразів (А13) та (А17) є детермінанти матриць, одна з яких є транспонованою до іншої, виконується рівність

$$|\boldsymbol{F}| = |\boldsymbol{K}|. \qquad \text{(A18)}$$

Використовуючи (А5), (А10), (А14), (А18), встановлюємо кінцеві залежності для діагональних елементів матриць $(\boldsymbol{I}\text{-}\boldsymbol{A})^{-1}$ та $(\boldsymbol{I}\text{-}\boldsymbol{Q})^{-1}$

$$a_{ii}^{(-1)} = q_{ii}^{(-1)} = \frac{z_i}{\Delta \cdot D^2(z_i)} \begin{vmatrix} z_1 - z_{11} & -z_{1j} & -z_{1n} \\ -z_{j1} & z_j - z_{jj} & -z_{jn} \\ -z_{n1} & -z_{j1} & z_n - z_{nn} \end{vmatrix}, \quad i, j = \overline{1, n}, \qquad \text{(A19)}$$

або

$$a_{ii}^{(-1)} = q_{ii}^{(-1)} = \frac{z_i}{\Delta \cdot D^2(z_i)} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \mathbf{1} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{n} \end{array} \\ \begin{vmatrix} z_1 - z_{11} & -z_{j1} & -z_{n1} \\ -z_{1j} & z_j - z_{jj} & -z_{nj} \\ -z_{1n} & -z_{jn} & z_n - z_{nn} \end{vmatrix} \end{array}, \quad \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j} = \overline{\mathbf{1}, \boldsymbol{n}}. \qquad \text{(A20)}$$

тут $\Delta = \Delta_a = \Delta_q$.

Таким чином, відповідні діагональні елементи матриць $(\boldsymbol{I}\text{-}\boldsymbol{A})^{-1}$ і $(\boldsymbol{I}\text{-}\boldsymbol{Q})^{-1}$ є тотожними для довільних розмірів цих матриць, якщо матриці $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{Q}$ задовольняють умовам (2)–(5) системи input-output (1).

1. Leontief W. Studies in the Structure of the American Economy: Theoretical and Empirical Explorations in Input-Output Analysis. Oxford, 1953, ISBN-10: 0195006186

2. Ghosh A. Input-Output Approach in an Allocation System. *Economica*. 1958. Vol. 25. P. 58—64. https://www.jstor.org/stable/2550694

3. De March M. et al. Eurostat Manual of Supple, Use and Input-Output Tables. *Eurostat, European Commission,* 2008. ISSN 1977-0375

4. Oosterhaven J. Adding supply-driven consumption makes the Ghosh model even more implausible. *Econ. Sys. Res*. 2012. Vol. 24(1). P. 101—111. https://doi.org/10.1080/09535314.2011.635137

5. De Mesnard L. Is the Ghosh model interesting. *J. Reg. Sci*. 2009. Vol. 49. P. 361—372. https://doi.org/10.1111/j.1467-9787.2008.00593.x

6. Dietzenbacher E. In vindication of the Ghosh model: a reinterpretation as a price model. *J. Reg. Sci*. 1997. Vol. 37. P. 629—651. https://doi.org/10.1111/0022-4146.00073

7. Davar E. Input-Output System Models: Leontief versus Ghosh. *15th International Input-output Conference Beijing,* China, 2005. https://www.iioa.org/conferences/15th/pdf/ezra_davar.pdf

8. Miller R.E., Blair P.D. Input-Output Analisys, Foundations and Extensions. Second Edition. Cambridge University Press, 2009. https://www.cambridge.org/9780521517133

Надійшла до редколегії: 07.09.2020

ISSN 2522-4344 (Online), ISSN 1562-8965 (Print). The problems of general energy, 2020, 3(62): 6–21
doi: https://doi.org/10.15407/pge2020.03.006

UDK 622.324

M.M. KULYK, Academician of the National Academy of Sciences of Ukraine, Dr. Sci. (Engin.), Professor, ORCID: 0000-0002-5582-7027
Institute of General Energy of the National Academy of Sciences of Ukraine, 172 Antonovycha str., Kyiv, 03150, Ukraine

MODIFICATION OF THE GHOSH MODEL STRUCTURE IN INTER-SECTORAL ANALYSIS

A modified output model in the input-output system based on value added data (modified Ghosh model) is proposed and investigated. Its balance and absence of methodological errors are proved. Due to the fact that the modified Ghosh model is based on value added, the accuracy of its output forecasts should not be worse than the accuracy of output determination which based on final demand according of the classical Leontief model.
Using a new matrix in the modified Ghosh model, new mathematical dependences, that relate final demand in the Leontief model and value added in the modified Ghosh model, have been established. It was also found that the corresponding diagonal coefficients of the matrices, including the inverse ones, used in the Leontief model and the modified Ghosh model, are identical.

K e y w o r d s: modified Ghosh model, input-output, Leontief model, value added, final demand.

The method of intersectoral balance occupies a special place in economics. With a certain combination with the means of macro- and microeconomic analysis, this apparatus forms a holistic methodology and provides a comprehensive toolkit of scientific and applied research in the economic sphere, what has already led to exceptional results. Using the method of intersectoral balance, the problems of functioning and development of heterogeneous, complex objects, systems and phenomena in regional and planetary aspects are investigated and solved, namely economics as a whole, energetics, social sphere, ecology, climate change, natural disasters, man-made catastrophes, etc.

In the current state the input-output method has been widely used in the scientific fields of all industrialized countries. In such countries, government statistical offices are obliged to compile input-output tables for reporting periods, indicating the particular importance that national governments distinguish to this approach. In addition, input-output methods are actively used to implement projects of various international and national economic, financial, business structures and organizations.

The method of intersectoral balance is based on a modern mathematical apparatus. Indicative in this respect is, in particular, that the matrix (***I-A***) from the output model of input-output as a part of the subclass of matrices with special properties entered the general theory of matrices entitled the “Leontief matrix”.

Although the foundations of the theory of intersectoral balance were initiated and developed almost a century ago, its relevance and popularity are enhanced permanently by the high efficiency of this toolkit.

During all the time from the beginning of the input-output apparatus development until now, only two reliable systems of equations have been and remain mathematical basis of this apparatus: the Leontief model for determining output at a given final demand and the Ghosh model for determining output through value added.

Having at his disposal a model of output based on Leontief’s final demand [1], A. Ghosh [2] developed own output model in the input-output system which is based on the use of value added. Since then the debate over this model has not stopped.

During this time, many publications have been devoted to the Ghosh model. Discussions and suggestions are no longer limited of the value-added model. De March et al. [3] state that Ghosh model can be used to study the price and cost effects or forward links between industries. Quite harsh qualitative assessments of this model are provided. In particular, Oosterhaven [4] emphasizes its implausibility. According to de Mesnard [5], the Ghosh model is of no interest at all. Dietzenbacher [6] attempted to establish links between the Ghosh model and the Leontief price model. Davar [7] contradictes this possibility and insists that the Ghosh model cannot be equivalent to Leontief's input-output model.

Some of these critical assessments are even surprising in their radicalism. It is possible that some of them were caused by the excessive hopes of their authors for using Ghosh model for other tasks (for example, determining prices), which later did not come true. But from an econometric point of view, the Ghosh model is a twin and competitor to the Leontief model, and it can and should be used only to determine the output. For balanced input-output (IO) structures, these models give adequate (matching) results (see below). In a balanced IO structure two balances are ensured: an output balance and a input balance. V. Leontiev used the balance of output to build his currently classic model based on indicators of final demand. It was quite logical and even naturally from the point of view of econometrics to build another model for determining output in the input-output system, which would be based not on final demand, but on added value, as A. Ghosh did. If it had not been implemented by Ghosh, this model would have been built by someone else.

This method of determining the volume of output has several advantages over the classical method.

Value added forecast indicators, in contrast to final demand, are systematically developed for government purposes by statistical services and can be used in input-output structures without changes or with little adaptation. Thus, in the case of their application in the Ghosh model, there is no need for additional research to generate input data. At the same time statistical services, even in developed countries, do not develop forecasts for final demand. Moreover, the information base of the statistical services of some of these countries does not always provide even the actual data necessary for formation of final demand used in the existing output model. This problem has to be solved by specialists who use intersectoral balance tools to determine output through final demand. This leads to a significant increase of laboriousness and time for research. But even more important is the fact that the much poorer statistical base, applied to the classical Leontief model, should lead to greater errors in final demand forecasts than in value added forecasts. This, in turn, leads to the fact that the accuracy of output forecasting for the Ghosh model is expected to be significantly higher than the accuracy of those for the Leontief model.

Thus, there is reason to believe that the mathematical model of output, built on the basis of value added, at least should not be inferior to the model based on final demand.

1. The present structure of the Ghosh model and problem formulation

The Ghosh model, like the Leontief model, was built on the structure of input-output matrices, which is provided in Scheme (1)

$$\begin{array}{c} \\ \mathbf{1} \\ \boldsymbol{i} \\ \boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{n} \end{array}\begin{array}{c} \mathbf{1}\quad \boldsymbol{i}\ \boldsymbol{Z}\ \boldsymbol{j}\quad \boldsymbol{n} \\ \begin{bmatrix} z_{11} & z_{1i} & z_{1j} & z_{1n} \\ z_{i1} & z_{ii} & z_{ij} & z_{in} \\ z_{j1} & z_{ji} & z_{jj} & z_{jn} \\ z_{n1} & z_{ni} & z_{nj} & z_{nn} \end{bmatrix} \end{array};\ \begin{array}{c} \boldsymbol{f} \\ \begin{bmatrix} f_1 \\ f_i \\ f_j \\ f_n \end{bmatrix} \end{array};\ \begin{array}{c} \boldsymbol{x} \\ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_i \\ x_j \\ x_n \end{bmatrix} \end{array}. \tag{1}$$

$$\begin{bmatrix} v_1 & v_i & v_j & v_n \end{bmatrix}\ \boldsymbol{v}'$$

$$\begin{bmatrix} z_1 & z_i & z_j & z_n \end{bmatrix}\ \boldsymbol{z}' = \boldsymbol{x}'$$

Here $i, j = \overline{1,n}$ – sector numbering, z_{ij} – elements of the matrix of intermediate sales $\boldsymbol{Z}$; $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{z}$ – vectors of final demand, output, value added and total input, respectively. In balanced tables (1), dependencies are always provided, as is known:

$$z_i = x_i, \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} v_i = \sum_{i=1}^{n} f_i, \tag{3}$$

as well as the balance of output

$$\sum_{j=1}^{n} z_{ij} + f_i = x_i \tag{4}$$

and input balance

$$\sum_{i=1}^{n} z_{ij} + v_j = x_j. \tag{5}$$

We draw attention to the fundamental need to ensure the dependences (2)–(5) in the construction of correct input-output models.

The Ghosh model in its modern form and its transcription by Miller, Blair [8] has the form

$$(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}')\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}, \tag{6}$$

where the Ghosh matrix

$$\boldsymbol{B} = \left[b_{ij} \right] = \left[z_{ij} / x_i \right], \quad i, j = \overline{1,n} \tag{7}$$

or in the expanded form

$$B=\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} \mathbf{1} & \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{n} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathbf{1} \\[2em] \boldsymbol{i} \\[2em] \boldsymbol{j} \\[2em] \boldsymbol{n} \end{array} & \begin{bmatrix} \frac{z_{11}}{x_1} & \frac{z_{1i}}{x_1} & \frac{z_{1j}}{x_1} & \frac{z_{1n}}{x_1} \\ \frac{z_{i1}}{x_i} & \frac{z_{ii}}{x_i} & \frac{z_{ij}}{x_i} & \frac{z_{in}}{x_i} \\ \frac{z_{j1}}{x_j} & \frac{z_{ji}}{x_j} & \frac{z_{jj}}{x_j} & \frac{z_{jn}}{x_j} \\ \frac{z_{n1}}{x_n} & \frac{z_{ni}}{x_n} & \frac{z_{nj}}{x_n} & \frac{z_{nn}}{x_n} \end{bmatrix} \end{array}. \qquad (8)$$

To further recall that the Leontief model of determining the output volume in monetary form has a structure

$$(I - A)x = f, \qquad (9)$$

where

$$A=\left[a_{ij}\right]=\left[z_{ij} / x_j\right], \quad i,j=\overline{1,n}. \qquad (10)$$

A comparison of models (6), (7) and (9), (10) raises the question why their structure is so drastically different (due to the use of the transposed matrix B'). Why is it necessary to form a matrix B, if it is not used in the structure of the Ghosh model (6), (7). The answer would be the fact that otherwise it would be impossible to build the output model based on the value added data. But this is not so, because the symmetry of the balances of output (4) and input (5) makes it possible.

Therefore, the purpose of this article is to form a modified Ghosh model in a form similar to the Leontief model (9), (10), namely, in the form

$$(I - Q)x = \gamma. \qquad (11)$$

The use of the Ghosh model in form (11) eliminates possible confusion with the formation and use of the Ghosh matrix (8) and (more importantly) provides simplification and certain perspectives in theoretical research, some of which will be discussed below.

2. Modified structure of the Ghosh model

The modified Ghosh model is constructed using equation (2) and input balance (5). In expanded form, the input balance has the form

$$\begin{aligned} z_{11}+z_{i1}+z_{j1}+z_{n1}+v_1&=x_1, \\ z_{1i}+z_{ii}+z_{ji}+z_{ni}+v_i&=x_i, \\ z_{1j}+z_{ij}+z_{jj}+z_{nj}+v_j&=x_j, \\ z_{1n}+z_{in}+z_{jn}+z_{nn}+v_n&=x_n. \end{aligned} \qquad (12)$$

To convert system (12) to vector-matrix form, each of the amounts of intermediate sales z_{ij}; $i,j=\overline{1,n}$ provide in identical form

$$\begin{aligned} z_{11}+z_{i1}+z_{j1}+z_{n1}&=\frac{z_{11}}{x_1}x_1+\frac{z_{i1}}{x_i}x_i+\frac{z_{j1}}{x_j}x_j+\frac{z_{n1}}{x_n}x_n, \\ z_{1i}+z_{ii}+z_{ji}+z_{ni}&=\frac{z_{1i}}{x_1}x_1+\frac{z_{ii}}{x_i}x_i+\frac{z_{ji}}{x_j}x_j+\frac{z_{ni}}{x_n}x_n, \\ z_{1j}+z_{ij}+z_{jj}+z_{nj}&=\frac{z_{1j}}{x_1}x_1+\frac{z_{ij}}{x_i}x_i+\frac{z_{jj}}{x_j}x_j+\frac{z_{nj}}{x_n}x_n, \\ z_{1n}+z_{in}+z_{jn}+z_{nn}&=\frac{z_{1n}}{x_1}x_1+\frac{z_{in}}{x_i}x_i+\frac{z_{jn}}{x_j}x_j+\frac{z_{nn}}{x_n}x_n. \end{aligned} \qquad (13)$$

After that, the system of equations (12) takes form

$$\begin{bmatrix} \frac{z_{11}}{x_1} & \frac{z_{i1}}{x_i} & \frac{z_{j1}}{x_j} & \frac{z_{n1}}{x_n} \\ \frac{z_{1i}}{x_1} & \frac{z_{ii}}{x_i} & \frac{z_{ji}}{x_j} & \frac{z_{ni}}{x_n} \\ \frac{z_{1j}}{x_1} & \frac{z_{ij}}{x_i} & \frac{z_{jj}}{x_j} & \frac{z_{nj}}{x_n} \\ \frac{z_{1n}}{x_1} & \frac{z_{in}}{x_i} & \frac{z_{jn}}{x_j} & \frac{z_{nn}}{x_n} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_i \\ x_j \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_i \\ v_j \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_i \\ x_j \\ x_n \end{bmatrix}. \qquad (14)$$

The structure of equations (14) allows us to represent the system of dependences (12) in vector-matrix form (11), which is the purpose of the article, where the matrix Q has elements

$$q_{ij}=z_{ji} / x_j, \quad i,j=\overline{1,n}. \qquad (15)$$

If we select the j-th equation from the system (14), we immediately obtain the input balance (5). That is, the modified Ghosh output model is balanced and therefore should not have methodological errors.

The system of equations (11), (15) is a modified Ghosh output model in the system of input-output models, which is based not on final demand but on value added.

Example. The possibilities of a modified Ghosh model for determining the output were investigated using (table 1) a system of input-output reporting tables (Germany, 1995), which is given in De March et al. [3, P. 483, 490 (version A)].

Two variants of calculations of output volumes are investigated. According to the first of these, intermediate sales Z, final demand f and total inputs z were considered known. Output indices x were determined, i.e., output volumes were determined using the Leontief model (9), (10). The indicators of the vector x had to coincide element by element with the indicators of total inputs z (table 1). Pre-calculated matrices A and (I-A) had the form given in Table. 2.

Table 1. Reporting system input-output

Millions of Euro

		Agriculture	Manufacturing	Construction	Trade	Business services	Other services	Final demand	Output
		1	2	3	4	5	6	7	8
		Intermediate sales ***Z***						***f***	***x***
1	Agriculture	1131	25480	1	607	710	762	15219	43910
2	Manufacturing	7930	304584	64167	41082	11981	30360	619342	1079446
3	Construction	426	7334	3875	5296	23457	9155	196063	245606
4	Trade	3559	72717	14190	74399	10835	21008	343355	540063
5	Business services	3637	96115	31027	65755	193176	34223	268554	692487
6	Other services	1552	14986	1747	11225	15058	22070	442280	508918

Value added	25675	558230	130599	341699	437270	391340	***v’***
Input, total	43910	1079446	245606	540063	692487	508918	***z’*** = ***x’***

Table 2. Matrices ***A*** and (***I-A***)

	1	2	3	4	5	6
Matrix ***A***						
1	0,025757231	0,023604701	4,07156E-06	0,001123943	0,00102529	0,001497294
2	0,180596675	0,282166963	0,261259904	0,076068903	0,017301408	0,059655976
3	0,009701662	0,006794226	0,015777302	0,009806263	0,03387356	0,017989146
4	0,081052152	0,067365111	0,057775462	0,137759854	0,015646503	0,041279735
5	0,082828513	0,089041045	0,126328347	0,121754314	0,278959749	0,06724659
6	0,035345024	0,013883047	0,007113018	0,020784612	0,021744813	0,043366515
Matrix **(*I-A*)**						
1	0,974242769	-0,023604701	-4,07156E-06	-0,001123943	-0,00102529	-0,001497294
2	-0,180596675	0,717833037	-0,261259904	-0,076068903	-0,017301408	-0,059655976
3	-0,009701662	-0,006794226	0,984222698	-0,009806263	-0,03387356	-0,017989146
4	-0,081052152	-0,067365111	-0,057775462	0,862240146	-0,015646503	-0,041279735
5	-0,082828513	-0,089041045	-0,126328347	-0,121754314	0,721040251	-0,06724659
6	-0,035345024	-0,013883047	-0,007113018	-0,020784612	-0,021744813	0,956633485

The scheme of determination and output volumes calculated according to the Leontief model is shown in the Table 3 [3].

According to the second option, the indicators of intermediate sales ***Z***, value added ***v*** and total inputs ***z*** were considered known. The output vector ***x*** was determined using a matrix $(\boldsymbol{I}\text{-}\boldsymbol{Q})^{-1}$ and vector ***v***, that is, according to the scheme of the modified Ghosh model. Matrices ***Q*** and **(*I-Q*)** were calculated and listed in Table. 4.

In the table. 5 presents the source data for determining the output ***x*** based on the matrix $(\boldsymbol{I}\text{-}\boldsymbol{Q})^{-1}$ and vector ***v***, i.e., a modified Ghosh model was used here.

Calculations show that the output x obtained using the Leontief model and the modified Ghosh model are identical. They also completely coincide with the actual production data, which are given in table. 1. Similar to Leontief model, the modified Ghosh model has no methodological errors. It demonstrates its adequacy and competitiveness.

The fact that the Leontief model and the modified Ghosh model are different in nature but describe a common set of input-output tools indicates the potential possibility of certain connections between them.

Table 3. Determination of the output $\boldsymbol{x}$ according to the Leontief model

$(\boldsymbol{I}\text{-}\boldsymbol{A})^{-1}$							$\boldsymbol{f}$		$\boldsymbol{x}$
1,033872366	0,035030051	0,010021749	0,00508589	0,00302524	0,004423248		15219		43910
0,289644215	1,429151859	0,396130509	0,141973993	0,059632189	0,107342982		619342		1079446
0,020699544	0,019087986	1,028937758	0,02108126	0,050037004	0,024998564	x	196063	=	245606
0,126914744	0,121400291	0,106421353	1,178399633	0,035567713	0,063119829		343355		540063
0,1842067	0,207106708	0,250342948	0,223880455	1,412561607	0,126867916		268554		692487
0,049500711	0,029521911	0,021772349	0,033096857	0,034230316	1,051494704		442280		508918

Table 4. Matrices $\boldsymbol{Q}$ and $(\boldsymbol{I}\text{-}\boldsymbol{Q})$

	1	2	3	4	5	6
Matrix $\boldsymbol{Q}$						
1	0,025757231	0,007346361	0,001734485	0,006589972	0,005252084	0,003049607
2	0,580277841	0,282166963	0,029860834	0,134645402	0,138796829	0,029446787
3	2,27739E-05	0,059444382	0,015777302	0,026274712	0,044805173	0,003432773
4	0,01382373	0,038058411	0,021562991	0,137759854	0,094954851	0,022056599
5	0,016169437	0,011099212	0,095506624	0,020062474	0,278959749	0,029588264
6	0,017353678	0,028125538	0,037275148	0,038899165	0,049420422	0,043366515
Matrix $(\boldsymbol{I}\text{-}\boldsymbol{Q})$						
1	0,974242769	-0,007346361	-0,001734485	-0,006589972	-0,005252084	-0,003049607
2	-0,580277841	0,717833037	-0,029860834	-0,134645402	-0,138796829	-0,029446787
3	-2,27739E-05	-0,059444382	0,984222698	-0,026274712	-0,044805173	-0,003432773
4	-0,01382373	-0,038058411	-0,021562991	0,862240146	-0,094954851	-0,022056599
5	-0,016169437	-0,011099212	-0,095506624	-0,020062474	0,721040251	-0,029588264
6	-0,017353678	-0,028125538	-0,037275148	-0,038899165	-0,049420422	0,956633485

Table 5. Determination of the output $\boldsymbol{x}$ according to the modified Ghosh model

$(\boldsymbol{I}\text{-}\boldsymbol{Q})^{-1}$							$\boldsymbol{v}$		$\boldsymbol{x}$
1,033872366	0,011782227	0,003700712	0,010318845	0,011680387	0,004270975		25675		43910
0,861148918	1,42915186	0,083892291	0,242647726	0,322837119	0,062617767		558230		1079446
0,056055609	0,090131447	1,028937758	0,048397544	0,088789725	0,010507428	x	130599	=	245606
0,062552972	0,071031715	0,046355579	1,178399633	0,174601906	0,035122334		341699		540063
0,047709843	0,038255286	0,141079514	0,045606122	1,412561607	0,046577344		437270		692487
0,051265554	0,05060816	0,051799302	0,059479759	0,093236936	1,051494704		391340		508918

3. Vector-matrix relationship between value added and final demand

The existence of models (11), (15) and (9), (10) together with use of the dependence (2) makes it possible to establish relationships between the vectors $\boldsymbol{f}$ and $\boldsymbol{v}$ in the input-output system (1). Indeed, using first (9), (10) and then (11), we obtain the dependence for $\boldsymbol{f}$:

$$\boldsymbol{f} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})^{-1}\boldsymbol{v}. \quad (16)$$

Dependence for $\boldsymbol{v}$ is obtained similarly

$$\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{f}. \quad (17)$$

Note that expressions (16), (17) satisfy the dependences (2), (3).

They link the important indicators of final demand and value added, which are the source information for the Leontief model and the modified Ghosh model, respectively, in vector-matrix form, and this determines the relationship between them. These dependences could not be obtained earlier due to the absence of the matrix $\boldsymbol{Q}$.

4. The identity of the diagonal elements of the Leontief model matrix and of the modified Ghosh model matrix

Comparison of matrices $\boldsymbol{A}$ and $\boldsymbol{Q}$, $(\boldsymbol{I}\text{-}\boldsymbol{A})$ and $(\boldsymbol{I}\text{-}\boldsymbol{Q})$, $(\boldsymbol{I}\text{-}\boldsymbol{A})^{-1}$ and $(\boldsymbol{I}\text{-}\boldsymbol{Q})^{-1}$, which are given in the above example, demonstrates the complete coincidence of their respective diagonal coefficients. We will show that this property is inherent not only for the matrices given in the example, but also for all matrices that correspond the conditions (2)–(5) input-output systems (1).

For matrices $\boldsymbol{A}$ and $\boldsymbol{Q}$ at $i = j$ equality

$$a_{ii} = q_{ii} \tag{18}$$

automatically follows from dependencies (10), (15).

The equality of corresponding diagonal elements in the matrices $(\boldsymbol{I}\text{-}\boldsymbol{A})$ and $(\boldsymbol{I}\text{-}\boldsymbol{Q})$ follows from (18).

Proving the identity of diagonal elements of matrices $(\boldsymbol{I}\text{-}\boldsymbol{A})^{-1}$ and $(\boldsymbol{I}\text{-}\boldsymbol{Q})^{-1}$ much more complicated, requires a lot of space, and therefore it is made in the Appendix.

CONCLUSIONS

The current Ghosh model (6), (7) is based on the use of forecast value added data. Forecasts of gross domestic product and value added have long, deeply and regularly (usually annually) been developed by various national and international economic and financial structures, including government. The methods and accuracy of such forecasts are of a higher level compared to the forecasts of final demand, on which the Leontief model (9), (10) is based. Therefore, from an econometric point of view, the accuracy of predictions of output made using the Ghosh model should be at least not worse than that provided by the classical Leontief model.

The modified Ghosh model (11), (15) formally differs from current Ghosh model (6), (7) by the presence of a new matrix $\boldsymbol{Q}$. However, this difference is only a structural feature, and in mathematical terms these models are identical. Indeed, according to (7), the matrix $\boldsymbol{B}$ (8) has an element $b_{ji} = z_{ji}/x_j$. On the other hand, the element q_{ji} the matrix $\boldsymbol{Q}$ according to (15) has the same value, namely, $q_{ji} = z_{ji}/x_j$. That is, there is a dependence $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{B}'$, which confirms the mathematical identity of the current and modified Ghosh models.

However, in our opinion, the modified Ghosh model is more attractive and promising than the current one due to the following factors. It contains (uses) one matrix ($\boldsymbol{Q}$) instead of two ($\boldsymbol{B}$ i $\boldsymbol{B}'$), which appear in the current model. The modified model has a structure (unlike the current one), similar to the structure of the classical Leontief model. This feature is logical and even natural considering that these two models are based on the mirror properties of the input-output structure, which are the balances of output and input. Due to this, the modified model is more understandable and easy to use. But the most important is that the use of the matrix $\boldsymbol{Q}$ significantly expands the possibilities of theoretical research within the input-output structures.

Already in this article, thanks to the construction of a new matrix $\boldsymbol{Q}$ in the modified Ghosh model, new dependencies between the vectors of final demand and value added have been identified, which can be effectively used in balancing the system of input-output matrices. It is also established that the corresponding matrices of the classical Leontief model and the modified Ghosh model have identical diagonal elements in pairs, which is useful in various analytical studies.

ANNEX

Proof of identity of diagonal elements of matrices $(\boldsymbol{I}\text{-}\boldsymbol{A})^{-1}$ and $(\boldsymbol{I}\text{-}\boldsymbol{Q})^{-1}$

To prove this identity, we define in general the dependence for diagonal elements $a_{ii}^{(-1)}$, $i, j = \overline{1, n}$ matrix $(\boldsymbol{I}\text{-}\boldsymbol{A})^{-1}$, relevant elements $q_{ii}^{(-1)}$ matrix $(\boldsymbol{I}\text{-}\boldsymbol{Q})^{-1}$ and compare them with each other. The matrix $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})$ is used as

$$I - A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 1 & i & j & n \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ i \\ j \\ n \end{array} & \begin{bmatrix} \frac{z_1 - z_{11}}{z_1} & -\frac{z_{1i}}{z_i} & -\frac{z_{1j}}{z_j} & -\frac{z_{1n}}{z_n} \\ -\frac{z_{i1}}{z_1} & \frac{z_i - z_{ii}}{z_i} & -\frac{z_{ij}}{z_j} & -\frac{z_{in}}{z_n} \\ -\frac{z_{j1}}{z_1} & -\frac{z_{ji}}{z_i} & \frac{z_j - z_{jj}}{z_j} & -\frac{z_{jn}}{z_n} \\ -\frac{z_{n1}}{z_1} & -\frac{z_{ni}}{z_i} & -\frac{z_{nj}}{z_j} & \frac{z_n - z_{nn}}{z_n} \end{bmatrix} \end{array}, \quad i, j = \overline{1, n} \tag{A1}$$

and matrix $(\boldsymbol{I}\text{-}\boldsymbol{Q})$ - in a similar form

$$I - Q = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 1 & i & j & n \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ i \\ j \\ n \end{array} & \begin{bmatrix} \frac{z_1 - z_{11}}{z_1} & -\frac{z_{i1}}{z_i} & -\frac{z_{j1}}{z_j} & -\frac{z_{n1}}{z_n} \\ -\frac{z_{1i}}{z_1} & \frac{z_i - z_{ii}}{z_i} & -\frac{z_{ji}}{z_j} & -\frac{z_{ni}}{z_n} \\ -\frac{z_{1j}}{z_1} & -\frac{z_{ij}}{z_i} & \frac{z_j - z_{jj}}{z_j} & -\frac{z_{nj}}{z_n} \\ -\frac{z_{1n}}{z_1} & -\frac{z_{in}}{z_i} & -\frac{z_{jn}}{z_j} & \frac{z_n - z_{nn}}{z_n} \end{bmatrix} \end{array}, \quad i, j = \overline{1, n}. \tag{A2}$$

We first prove that the matrices (A1) and (A2) have the same determinants. Indeed, the determinant of the matrix ***(I-A)***

$$|I - A| = \Delta_a = \frac{1}{D(z_i)}|B|, \quad (A3)$$

where

$$B = \begin{bmatrix} z_1 - z_{11} & -z_{1i} & -z_{1j} & -z_{1n} \\ -z_{i1} & z_i - z_{ii} & -z_{ij} & -z_{in} \\ -z_{j1} & -z_{ji} & z_j - z_{jj} & -z_{jn} \\ -z_{n1} & -z_{ni} & -z_{nj} & z_n - z_{nn} \end{bmatrix}, \quad i,j = \overline{1,n}, \quad (A4)$$

$$D(z_i) = z_1 \cdot z_2 \cdots z_i \cdots z_{n-1} \cdot z_n. \quad (A5)$$

For the matrix ***(I-Q)*** the dependence is valid

$$|I - Q| = \Delta_q = \frac{1}{D(z_i)}|C|, \quad (A6)$$

in which the matrix ***C*** has the form

$$C = \begin{array}{c} \\ 1 \\ i \\ j \\ n \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & i & j & n \end{array} \\ \begin{bmatrix} z_1 - z_{11} & -z_{i1} & -z_{j1} & -z_{n1} \\ -z_{1i} & z_i - z_{ii} & -z_{ji} & -z_{ni} \\ -z_{1j} & -z_{ij} & z_j - z_{jj} & -z_{nj} \\ -z_{1n} & -z_{in} & -z_{jn} & z_n - z_{nn} \end{bmatrix} \end{array}, \quad i,j = \overline{1,n}. \quad (A7)$$

A comparison of matrices (A4) and (A7) shows that

$$C = B'. \quad (A8)$$

Therefore, the determinants of matrices ***B*** and ***C*** coincide

$$|C| = |B|, \quad (A9)$$

and according to (A3) and (A6) are equal determinants of matrices ***(I-A)*** and ***(I-Q)***

$$\Delta_a = \Delta_q. \quad (A10)$$

The analysis makes it possible to determine in general and compare the diagonal coefficients of the matrices $(I\text{-}A)^{-1}$ and $(I\text{-}Q)^{-1}$.

Since we are talking about diagonal coefficients of inverse matrices, in the further analysis the algebraic additions to these elements will coincide with the corresponding minors. Dependence for element ***ii*** of the matrix $(I\text{-}A)^{-1}$ form using a classical expression for an arbitrary element of the inverse matrix, namely

$$a_{ii}^{(-1)} = \frac{1}{\Delta_a}|F|, \quad (A11)$$

where the matrix ***F*** has the form

$$F = \begin{array}{c} \\ 1 \\ j \\ n \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & j & n \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{z_1 - z_{11}}{z_1} & -\frac{z_{1j}}{z_j} & -\frac{z_{1n}}{z_n} \\ -\frac{z_{j1}}{z_1} & \frac{z_j - z_{jj}}{z_j} & -\frac{z_{jn}}{z_n} \\ -\frac{z_{n1}}{z_1} & -\frac{z_{jn}}{z_j} & \frac{z_n - z_{nn}}{z_n} \end{bmatrix} \end{array}, \quad i,j = \overline{1,n}. \quad (A12)$$

For minor $|F|$ is a fair dependency

$$|F| = \frac{1}{P(z_i)} \cdot \begin{vmatrix} z_1 - z_{11} & -z_{1j} & -z_{1n} \\ -z_{j1} & z_j - z_{jj} & -z_{jn} \\ -z_{n1} & -z_{j1} & z_n - z_{nn} \end{vmatrix}, \quad i,j = \overline{1,n}, \quad (A13)$$

here

$$P(z_i) = z_1 \times \cdots \times z_{i-1} \times z_{i+1} \times \cdots \times z_n = D(z_i)/z_i. \quad (A14)$$

To determine the element ***ii*** of the inverse matrix $(I\text{-}Q)^{-1}$ use a dependence similar to (A11)

$$q_{ii}^{(-1)} = \frac{1}{\Delta_q}|K|, \quad (A15)$$

in which the matrix ***K*** has the form

$$K = \begin{array}{c} \\ 1 \\ j \\ n \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & j & n \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{z_1 - z_{11}}{z_1} & -\frac{z_{j1}}{z_j} & -\frac{z_{n1}}{z_n} \\ -\frac{z_{1j}}{z_1} & \frac{z_j - z_{jj}}{z_j} & -\frac{z_{nj}}{z_n} \\ -\frac{z_{1n}}{z_1} & -\frac{z_{jn}}{z_j} & \frac{z_n - z_{nn}}{z_n} \end{bmatrix} \end{array}, \quad i,j = \overline{1,n}. \quad (A16)$$

Minor $|K|$ is determined similarly (A11), namely

$$|K| = \frac{1}{P(z_i)} \cdot \begin{vmatrix} z_1 - z_{11} & -z_{j1} & -z_{n1} \\ -z_{1j} & z_j - z_{jj} & -z_{nj} \\ -z_{1n} & -z_{jn} & z_n - z_{nn} \end{vmatrix}, \quad i,j = \overline{1,n}. \quad (A17)$$

Since in the right parts of expressions (A13) and (A17) there are determinants which are determinants of matrices, one of which is transposed to another, equality takes place.

$$|F| = |K|. \quad (A18)$$

Using (A5), (A10), (A14), (A19) we establish final dependences for diagonal elements of matrices $(I\text{-}A)^{-1}$ and $(I\text{-}Q)^{-1}$

$$a_{ii}^{(-1)} = q_{ii}^{(-1)} = \frac{z_i}{\Delta \cdot D^2(z_i)} \begin{vmatrix} z_1 - z_{11} & -z_{1j} & -z_{1n} \\ -z_{j1} & z_j - z_{jj} & -z_{jn} \\ -z_{n1} & -z_{j1} & z_n - z_{nn} \end{vmatrix}, \quad i, j = \overline{1,n}, \qquad \text{(A19)}$$

or

$$a_{ii}^{(-1)} = q_{ii}^{(-1)} = \frac{z_i}{\Delta \cdot D^2(z_i)} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & j & n \end{array} \\ \begin{vmatrix} z_1 - z_{11} & -z_{j1} & -z_{n1} \\ -z_{1j} & z_j - z_{jj} & -z_{nj} \\ -z_{1n} & -z_{jn} & z_n - z_{nn} \end{vmatrix} \end{array}, \quad i, j = \overline{1,n}. \qquad \text{(A20)}$$

where $\Delta = \Delta_a = \Delta_q$.

Thus, the corresponding diagonal elements of the matrices $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}$ and $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{Q})^{-1}$ are identical for their arbitrary dimension, if the matrices $\boldsymbol{A}$ and $\boldsymbol{Q}$ satisfy the conditions (2) – (5) of the input-output system (1).

1. Leontief, W. (1953). Studies in the Structure of the American Economy: Theoretical and Empirical Explorations in Input-Output Analysis. Oxford. ISBN-10: 0195006186

2. Ghosh, A. (1958). Input-Output Approach in an Allocation System. *Economica*. *Vol. 25*, 58—64. https://www.jstor.org/stable/2550694

3. De March M. et al. {2008). Eurostat Manual of Supple, Use and Input-Output Tables. *Eurostat, European Commission.* ISSN 1977-0375.

4. Oosterhaven, J. (2012). Adding supply-driven consumption makes the Ghosh model even more implausible. *Econ. Sys. Res*., *Vol. 24(1),* 101—111. https://doi.org/10.1080/09535314.2011.635137

5. De Mesnard L. (2009). Is the Ghosh model interesting. *J. Reg. Sci*.,*Vol. 49,* 361—372. https://doi.org/10.1111/j.1467-9787.2008.00593.x

6. Dietzenbacher, E. (1997). In vindication of the Ghosh model: a reinterpretation as a price model. *J. Reg. Sci*., *Vol. 37,* 629—651. https://doi.org/10.1111/0022-4146.00073

7. Davar, E. (2005). Input-Output System Models: Leontief versus Ghosh. *15th International Input-output Conference Beijing,* China. https://www.iioa.org/conferences/15th/pdf/ezra_davar.pdf

8. Miller, R.E., & Blair, P.D. (2009). Input-Output Analisys, Foundations and Extensions. Second Edition. *Cambridge University Press.* https://www.cambridge.org/9780521517133

Resived to the Editorial Board: 07.09.2020