УДК 621.314.214

***В.М. МИКОЛАЄНКО** (Інститут енергозбереження та енергоменеджменту Національного технічного університету України "КПІ", Київ)*

АНАЛІЗ СТАТИСТИЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК І МОДЕЛЮВАННЯ ГРАФІКІВ ЕЛЕКТРИЧНИХ НАВАНТАЖЕНЬ З УРАХУВАННЯМ НЕСТАЦІОНАРНОСТІ ПРОЦЕСУ ЕЛЕКТРОСПОЖИВАННЯ

Проаналізовано існуючі методи математичного опису графіків електричних навантажень промислових об'єктів, імовірнісні характеристики графіків електричних навантажень. Обґрунтовано можливість використання для опису графіків електричних навантажень математичного апарата нестаціонарних випадкових періодичних процесів. Запропоновано алгоритм отримання характеристик дійсних графіків електричних навантажень, які базуються на одній з основних властивостей лінійних періодичних випадкових процесів – ергодичності дисперсії.

Кількісна інформація про електричні навантаження є основою раціонального рішення практично всього комплексу питань, пов'язаних із проектуванням та експлуатацією систем електропостачання промислових об'єктів. Навантаження великої частини споживачів електроенергії (об'єктів промисловості, сільського господарства, електротранспорту, комунально-побутового сектору тощо) змінюються в часі при розгляді їх як щодо коротких (секунди, долі секунди), так і на тривалих інтервалах (доба, тижні, роки) часу, мінливість навантажень електричних мереж є їхньою органічною властивістю.

На сьогодні для опису режиму електропостачання (РЕ) в основному застосовується два типи математичних моделей: детерміновані періодичні процеси та стаціонарні випадкові процеси.

Передумову для застосування детермінованої періодичної моделі РЕ становить їхня періодичність. Однак реалізація графіків енергетичних навантажень (ГЕН) не є строго періодичною функцією через нестабільність циклів роботи електроприймачів, стохастичний характер взаємодії окремих електроприймачів та інші випадкові фактори. Внаслідок цього РЕ є випадковим процесом. Циклічність роботи електроустаткування промислового об'єкта виявляється у вигляді періодичних флуктуацій РЕ.

Інша модель – стаціонарний випадковий процес (СВП) – відбиває стохастичний характер РЕ. Однак властивості її не узгоджуються з характерною рисою роботи електроустаткування – циклічністю. Дійсно, математичне очікування і дисперсія СВП не залежать від часу. З фізичної точки зору це свідчить про те, що реалізація СВП являє собою нерегулярні коливання біля деякого постійного значення (зумовленого математичним очікуванням СВП), причому розмах цих коливань (зумовлених дисперсією) залишається постійним. У розглянутому випадку розмах коливань періодично змінюється. Таким чином, принаймні дисперсія РЕ не є постійною, отже і сам процес не є стаціонарним.

За математичну модель РЕ приймають також адитивну модель – сума стаціонарного випадкового процесу $x(t)$ і детермінованої періодичної функції $f(t)$:

$$\xi(t) = x(t) + f(t).$$

Така модель дозволяє в першому наближенні врахувати наявність різкозмінних складових РЕ, однак так само як і СВП вона не відбиває періодичної зміни рівня флуктуації РЕ. В деяких роботах РЕ описують у вигляді адитивного нестаціонарного процесу:

$$I(t) = \sum_{\varphi=1}^{N_\Gamma} \bar{I}_\varphi \cos(\omega_\varphi t + \alpha_\varphi) + I_0(t) + \bar{I}_\Gamma ,$$

де $\omega_\varphi, \bar{I}_\varphi, \alpha_\varphi$ – відповідно частота, усереднена амплітуда і фазовий зсув φ-ї гармонійної складової; $I_0(t)$ – СВП із нульовим математичним очікуванням, середньоквадратичним відхиленням, що характеризується коефіцієнтом α; $\bar{I}_\Gamma$ – середнє значення навантаження за розглянутий інтервал часу Т; N_Γ – число врахованих гармонік.

Дана модель є іншою формою запису моделі, наведеної вище [1].

Моделі, описані в [1], описують режим електроспоживання за умови наявності інтервалів стаціонарності, що в остаточному підсумку приводить до опису РЕ моделлю СВП.

У деяких роботах як математичну модель застосовують методи прийняття рішень в умовах невизначеності (теоретико-ігровий підхід, теорія розмитих множин РЕ тощо).

Ці методи можуть бути використані для вироблення рекомендацій особам, що приймають рішення з планування розподілу лімітів електроенергії на рівні районних і регіональних енергетичних систем. Однак вони недостатньо ефективні для рішення задач розподілу електроенергії на рівні підприємств, оскільки ступінь невизначеності у споживанні електроенергії підприємством значно нижчий, ніж у районних і регіональних систем. Така множина методів моделювання РЕ ще раз доводить важливість і актуальність даної проблеми.

Усі перелічені вище моделі мають основні допущення: як нестаціонарний випадковий процес РЕ не враховуються; у багатьох випадках приймають без строгого математичного обґрунтування те, що РЕ мають нормальний закон розподілу.

Низка робіт містить спроби описувати РЕ як нестаціонарні випадкові процеси, без спрощень, але в остаточному підсумку, судячи з друкованих праць, моделі зводилися або до використання умов наявності інтервалів стаціонарності, або ж до моделей стохастичної апроксимації у вигляді СВП.

На підставі означеного можна зробити висновок, що для більш адекватного опису РЕ і відповідності моделі реальним РЕ необхідно розробити такий метод моделювання, який усував би всі зазначені допущення, а його висновки менше залежали від закону розподілу досліджуваного процесу. Розробка таких моделей можлива при розгляді РЕ у світлі теорії лінійних періодичних випадкових процесів з використанням як основних характеристик закономірності зміни математичного очікування і дисперсії в часі.

Проблеми аналізу випадкових процесів, і зокрема режимів електропостачання, привертає увагу спеціалістів з огляду на значення, яке вони відіграють у розробці складних інформаційних систем і при рішенні задач автоматизованого управління.

Випадковий процес взагалі може бути охарактеризований як процес, миттєве значення якого в довільний момент часу являє собою випадкову величину.

Математична модель випадкового процесу в загальному випадку завжди формується з огляду на те, що процес може бути представлений ансамблем (нескінченною сукупністю) реалізацій. Властивості випадкових процесів описуються ймовірнісними характеристиками. За їх допомоги випадкові процеси можуть бути представлені досить повно, тобто так само вичерпно, як і за допомоги ансамблю реалізацій.

Найбільш поширеними ймовірнісними характеристиками, що дозволяють судити про характер випадкового процесу, є: розподіл ймовірності; кореляційні функції; спектральні функції, а також відповідні числові характеристики: математичне очікування, дисперсія, інтервал кореляції, ефективна ширина спектра тощо [1, 2].

Стаціонарним називається випадковий процес, ймовірнісні характеристики якого не залежать від часу.

До нестаціонарних випадкових процесів належать такі випадкові процеси, для яких характерна наявність залежності ймовірнісних характеристик від часу. Точніше дане визначення може бути сформульовано таким чином.

Нехай $\{\theta_n(t_1,t_2,...,t_n)\}_{n=\overline{1,\infty}}$ система ймовірнісних характеристик, що забезпечує повне описання випадкового процесу $\boldsymbol{X(t)}$. Цей процес належить до класу нестаціонарних у тому випадку, якщо всі або будь-яка частина характеристик $\theta_n(t_1,t_2,...,t_n)$ залежать не лише від різниці моментів відліку, а й від поточного часу.

Таким чином, для стаціонарного випадкового процесу справедливими є такі рівняння:

а) для функції розподілу ймовірності:

$$F_n[x_1,t_1;x_2,t_2;...;x_n,t_n] = F_n[x_1,t_1+\tau;x_2,t_2+\tau;...;x_n,t_n+\tau] \quad (1)$$

б) для кореляційної функції:

$$R_x(t_1,t_2) = R_x(\tau), \quad (2)$$

де $\tau = t_2 - t_1$.

Існують поняття стаціонарних процесів у широкому та вузькому розумінні. За допомоги визначення, наведеного вище, випадкові процеси розподіляються на стаціонарні та нестаціонарні у вузькому розумінні.

За незалежних від часу ймовірнісних характеристиках перших двох порядків процес вважається стаціонарним у широкому розумінні. Для таких процесів характерною є постійність у часі математичного очікування, дисперсії, значень кореляційних функцій, що відповідають даному часовому інтервалу між відліками миттєвих значень тощо [1].

Проведемо кореляційний аналіз ГЕН енергоспоживання промислового об'єкта на базі аналізу кореляційної функції.

Кореляційна функція, яка визначається як математичне очікування добутку здвигнутих у часі відцентрованих реалізацій миттєвих значень випадкового процесу, характеризує таку важливу динамічну властивість процесу як ступінь лінійного зв'язку цих значень, тому кореляційний аналіз становить один із найважливіших розділів теорії випадкових процесів [16]. Формально кореляційна функція випадкового процесу визначається як межа вибіркового середнього:

$$R_x(S,\tau) = \lim_{d\to\infty} S_d[x_i(t)x_{i+S}(t+\tau)], \quad (3)$$

де τ – зміщення в часі миттєвих значень, що перемножуються; S – різниця номерів реалізацій, до яких належать миттєві значення, що перемножуються. В роботі [1] проведено аналіз кореляційної функції.

В результаті такого аналізу автокореляційних функцій, отриманих для ряду ГЕН енергоспоживання промислових об'єктів, у тому числі вугільних шахт, при різних об'ємах виборок було встановлено, що кореляційні функції з часом не затухають, а змінюються за коливальним законом з періодом, близьким до 24.

У табл. 1 показано числові значення періоду зміни ГЕН для різних досліджуваних підприємств.

Таблиця 1

Промисловий об'єкт	Період T
Верстатобудівний завод	28
Сталеливарний завод	29
Підприємство хім. машинобудування	22
Шахта №1	28
Шахта №2	24
Шахта №3	27

Таким чином, проведені дослідження свідчать про можливість розгляду ГЕН як нестаціонарного періодичного випадкового процесу.

Отримані значення періоду зміни ГЕН підтвердило дослідження про те, що період зміни ГЕН близький до 24 [1] або є кратним цьому числу.

Особлива роль математичного очікування як ймовірнісної характеристики визначається тим, що будь-яка з характеристик може бути представлена у вигляді математичного очікування.

Як відомо, математичне очікування EX безперервної випадкової величини X визначається рівнянням:

$$\mu = EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx \;, \qquad (4)$$

де $f(x)$ – щільність ймовірності або просто щільність X. Значення EX існує за абсолютної сходимості інтегралу, тобто якщо

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\,x\,|\, f(x)dx < \infty. \qquad (5)$$

Дисперсія безперервної випадкової величини X дорівнює:

$$\sigma^2 = D^2X = \int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - \mu. \qquad (6)$$

Дослідження для деяких промислових підприємств залежності математичного очікування та дисперсії проводились для різних об'ємів вибірок. Незмінності в часі цих числових характеристик випадкового процесу ГЕН могли б свідчити про його стаціонарність.

Аналіз графіків змін математичного очікування, дисперсії підприємств засвідчили, що за відповідний період T=24 їх числові характеристики залежать від часу.

Таким чином, на підставі аналізу залежності математичного очікування та дисперсії від часу можна також говорити про ГЕН як про нестаціонарний випадковий процес.

Для більш детального вивчення поведінки математичного очікування та дисперсії як функцій часу було проведено дослідження часових рядів математичних очікувань, відповідно і дисперсій, методом ковзаючої середньої [3, 4]. Цей метод дозволяє шляхом згладжування випадкових викидів вихідного часового ряду отримати згладжений часовий ряд електричних навантажень і по ньому визначити нову тенденцію зміни математичного очікування та дисперсії в часі.

Якщо прийняти непарний період згладжування, то елементи нового ряду визначаються за формулою:

$$V'_t = \frac{1}{k}\sum_{i=0.5-k/2}^{k/2-0.5}\left(V_{t+i}\right), \qquad t = \frac{k}{2} + 0{,}5 \div N\left(\frac{k}{2} - 0{,}5\right), \quad (7)$$

де V_t – елементи вихідного ряду; V'_t – елементи згладженого ряду; N – кількість елементів вихідного ряду; k – довжина періоду згладжування;

$k = 2m+1$, де m – ціле число.

Формулу для парних k приведено в літературі [5]. При аналізі за допомоги такого методу очікувані результати є такими:

1. Якщо отриманий часовий ряд матиме вигляд константи, то можна вважати, що одна з числових характеристик відповідає вимогам стаціонарності. В протилежному випадку цього стверджувати не можна і необхідно збільшити довжину періоду згладжування. При цьому довжина в період згладжування не повинна перевищувати $K_{доп} = 0{,}1N$.

2. Якщо і після цього математичне очікування не є сталою величиною, то можна стверджувати, що дана числова характеристика не відповідає вимогам стаціонарності.

Аналіз змін математичного очікування для тих самих об'ємів вибірок, що і математичне очікування після згладжування, також змінюється з відповідним розмахом і не є константою.

Для більш повного аналізу було проведено дослідження поведінки дисперсії згладженого часового ряду ГЕН для однакових об'ємів вибірок – навіть за максимального інтервалу згладжування дисперсія не є сталою величиною, а розмах її зміни сягає понад 5%. Таким чином, підсумовуючи проведені дослідження залежності математичного очікування та дисперсії від часу, можна констатувати, що без згладжування вихідного часового ряду ГЕН, а також за його часткового згладжування і навіть за максимально допустимого періоду згладжування математичне очікування і дисперсія не є константами, а залежать від часу, тобто коливаються в певному інтервалі і є далекими від константи. Отже, можна стверджувати, що два параметри (математичне очікування та дисперсія), які визначають характер випадкового процесу ГЕН, підтверджують його нестаціонарність.

Проведемо аналіз функції розподілу ймовірностей ГЕН енергоспоживання промислового об'єкта.

Функції розподілу ймовірностей (інтегральні та диференційні) становлять один із найважливіших класів ймовірних характеристик [6]. Саме за їх допомоги можуть встановлюватися значення та вигляд будь-яких числових і функціональних характеристик, а також вивчатися основні властивості випадкових процесів. Формально одномірна інтегральна функція розподілу ймовірності ***F(X)***, яка дорівнює ймовірності того, що миттєве значення $x \le X$, тобто $F(X) = P(x \le X)$, визначається як межа вибіркового середнього:

$$F(X) = \lim_{d \to \infty} S_d\left[\psi(x(t), X)\right] \quad , \qquad (8)$$

де $\psi(x, X) = \begin{cases} 1, & при\ x \le X \\ 0, & при\ x \rangle X \end{cases}$.

Таким чином, відповідно до основних визначень для одномірних інтегральних функцій розподілу ймовірностей маємо:

$$F_t(x) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \psi(x_i(t), X), \qquad (9)$$

де $F_t(x)$ – t-поточна одномірна інтегральна функція розподілу ймовірності ***X(t)***.

Розглянемо виконання (або ж невиконання) умови 1 відносно досліджуваних ГЕН. Якщо виявиться, що функція розподілу графіків навантаження залежить не лише від різниці моментів відліку, а й від часу, можна буде кваліфікувати досліджуваний випадковий процес як нестаціонарний з огляду на непостійність функції розподілу ймовірностей.

Оскільки при розгляді цього питання цікавим є не вигляд закону розподілу, а лише залежність функції розподілу від часу, можемо обмежитись дослідженням емпіричного розподілу випадкової величини ***X***, котрий показує, яким чином розподілено по всій області дійсних значень величини $x_1, x_2, ..., x_n$, що є реалізаціями ***X***. Такий підхід до вирішення питання можна пояснити також тим, що на підставі результатів, отриманих автором, а також аналізу робіт Кудріна Б.І. [7] та Курінного Є.Г., існує підтвердження того, що ГЕН є нестаціонарним випадковим процесом. Отже немає особливої потреби в більш складних дослідженнях.

Для об'єктів, що розглядалися, за різних об'ємів вибірок (від 1200 до 5000) було побудовано гістограми для кожної години відповідної доби (тобто 24 гістограми), з яких видно, що в різні години доби гістограми не співпадають, а мають суттєву різницю у формах. На підставі аналізу отриманих результатів можна зробити висновок, що характер залежності функції розподілу ГЕН від часу також підтверджує належність випадкового процесу ГЕН до нестаціонарних.

Проведений вище теоретичний та практичний аналіз ймовірних характеристик ГЕН промислових об'єктів дає всі підстави теоретично і практично обґрунтовувати можливість використання мультиплікативної моделі для опису ГЕН. Проведені дослідження характеру процесу енергоспоживання показали, що ГЕН слід розглядати як нестаціонарний періодичний випадковий процес.

Звернімо увагу на обґрунтування вигляду математичної моделі ГЕН і розглянемо джерела формування цих графіків. На інтервалах: хвилини, години – зміни ГЕН підприємства породжуються здебільшого зміною роботи технологічного обладнання, які мають циклічний характер.

Але в межах загальної лінійної випадкової моделі необхідно конкретизувати характер нестаціонарності ЛВП з метою адекватного врахування періодичності зміни рівня флуктуації ГЕН. Скористаємося для цього поняттям періодичного випадкового процесу [10].

Періодичним випадковим процесом називається дійсний сепарабельний випадковий процес

$\xi(t)$, всі кінцево мірні розподіли якого задовольняють умові:

$$F_{\xi}(t_1+T, t_2+T, ..., t_n+T;\ x_1, x_2, ..., x_n) = $$
$$= F_{\xi}(t_1, t_2, ..., t_n;\ x_1, x_2, ..., x_n),$$

де ***T***>0 – фіксоване число, що називається періодом випадкового процесу.

З визначення випливає, що всі початкові та усереднені моменти періодичного випадкового процесу, включаючи математичне очікування та дисперсію, є періодичними (з періодом ***T***) функціями. Періодичність дисперсії, що визначає характер зміни рівня флуктуацій ГЕН, дає можливість врахувати стохастичний характер і періодичність зміни рівня дисперсії ГЕН.

Важливим підкласом періодичних випадкових процесів є клас періодичних у широкому розумінні – періодично корельованих випадкових процесів (ПКВП).

Періодично корельованим випадковим процесом називається дійсний гільбертовий випадковий процес $\xi(t)$, математичним очікуванням якого є періодична функція:

$$m_{\xi}(t+T) = m_{\xi}(t), \qquad t \in (-\infty, +\infty), \qquad (10)$$

де ***T***>0 – фіксоване число, яке називається періодом корельованості процесу $\xi(t)$.

Періодично корельовані випадкові процеси зручно використовувати для розпізнавання ГЕН промислових об'єктів.

Підбиваючи підсумок викладеному вище, можна зробити висновок, що як математичною моделлю ГЕН доцільно скористатися класом нестаціонарних лінійних періодичних випадкових процесів (ЛПВП). З одного боку, ця модель має досить загальний характер. Винятковими її варіантами є широко застосовувані нині детерміновані періодичні, стаціонарні випадкові, нестаціонарні адитивна та мультиплікативна моделі. З іншого боку, модель у вигляді класу ЛПВП є більш конкретною, ніж загальна лінійна модель. Лінійність періодичного випадкового процесу відображає той факт, що розглянуті ГЕН являють собою накладання елементарних короткочасних незалежних електроспоживань. Періодичність характеристик лінійних випадкових процесів враховує періодичний характер зміни рівня флуктуацій описаних ГЕН.

Проведемо теоретичний аналіз моделі ГЕН у вигляді ЛПВП. Особливу увагу надамо гармонізованим періодичним випадковим процесам [1], важливість яких буде показано в наведених нижче викладках.

Ядро $\varphi(t,\tau)$ і породжуючий процес $\eta(\tau)$ лінійного випадкового процесу повинні мати такі властивості:

$$\varphi(t+T, \tau) = \varphi(t+\tau), \quad t \in (-\infty; \infty), \qquad (11)$$

Якщо $\xi(t)$ – лінійний випадковий процес з нульовим математичним очікуванням, породжуючий процес якого $\eta(\tau)$ являє собою дійсний випадковий процес з некорельованими прирощеннями. Кореляційна функція такого лінійного випадкового процесу визначається формулою [3].

Оскільки технологічне обладнання працює циклічно, то їх ГЕН зі збільшенням періоду аналізу змінюється несуттєво. На періоді дослідження: квартал, рік тощо – починає домінувати вплив на ГЕН режиму виконання плану, метеорологічні, сезонні та інші фактори.

Машини, механізми в циклічній роботі є джерелом здебільшого низькочастотних складових у загальному виразі ГЕН. Паралельно на ГЕН залежно від зміни навантаження впливають втрати в лініях, ГПП, аварійні зупинки, втрати від к.з. тощо. Ці зміни діють випадковим чином.

Суттєвий вплив на відповідні графіки мають такі фактори: якість електроматеріалів, правильність використання енергообладнання, механізмів, технологічна недисциплінованість обслуговуючого персоналу, небаланс у режимі забезпечення матеріалами.

З наведеного вище аналізу фактори, що впливають на режими електроспоживання, можна розділити на:

– кліматичні, гірсько-геологічні;
– технологічні;
– організаційно-економічні;
– технічні (характеристики обладнання).

На підставі проведеного аналізу методів описання ГЕН і характеру випадкових процесів, можна зробити висновок, що ГЕН циклічно працюючого промислового об'єкта можна описати лінійним випадковим, узагалі кажучи, нестаціонарним випадковим процесом.

Вважатимемо лінійним (в жорсткому розумінні) дійсний гільбертовий випадковий процес, який допускає представлення у вигляді стохастичного інтеграла:

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t,\tau)\, d\eta(\tau), \quad t \in (-\infty, \infty), \qquad (12)$$

де $\varphi(t,\tau)$ – детермінована функція з інтегрованим за τ квадратом; $\eta(\tau)$ – гільбертовий випадковий процес з незалежними прирощеннями.

Функція $\varphi(t,\tau)$ зазвичай називається ядром, а випадковий процес – $\eta(\tau)$ породжуючим процесом у лінійному випадковому процесі.

Математична модель (14), з одного боку, включає в себе як винятковий варіант обидві розглянуті вище моделі та їх комбінації [1], а з іншого – чималою мірою узгоджується з фізичними властивостями описаних ГЕН. У ній відображено той факт, що ГЕН об'єкта є результатом накладання короткочасних випадкових незалежних елементарних електроспоживань окремих частин об'єкта (участь у технологічному процесі випуску продукції). Дійсно, узагальнена похідна породжуючого процесу $\eta(\tau)$ являє собою випадковий процес з незалежними прирощеннями [8].

Таким чином, процес $\eta(\tau)$ можна трактувати як нескінченно щільне укладання імпульсів нульової тривалості, що мають нескінченно велику амплітуду. Тоді випадковий процес за кожного фіксованого t є результатом накладання таких імпульсів зважених функцій $\varphi(t,\tau)$. Дана інтерпретація структури ЛПС узгоджується з практикою замірів ГЕН, оскільки в точці виміру ГЕН являє собою випадкове накопичення ГЕН окремих електроприймачів.

Математична модель у вигляді ЛВП у найбільш загальному вигляді відображає характерні властивості ГЕН. Але, якщо дві перші моделі не враховують або стохастичний характер, або періодичність ГЕН, то лінійний процес описує їх у надто загальному вигляді. Так, дисперсія ЛВП може описувати будь-які, не обов'язково періодичні, зміни рівня флуктуацій ГЕН [24].

Отже, з відомих методів досліджень випливає, що найбільш загальною моделлю ГЕН є модель нестаціонарних періодичних випадкових процесів (НПВП) [9].

$$R_\xi(t_1,t_2)=M\{\xi(t_1)\xi(t_2)\}=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t_1,\tau)\varphi(t_2,\tau)dZ_2(\tau), \qquad (13)$$

де $Z_2(\tau)$ – другий сем-інваріант породжуючого процесу.

Розглянемо два можливих випадки.

1. Породжуючий процес ДВП – однорідний, ядро ЛВП – нестаціонарне.

Тоді:

$$\begin{gathered} Z_2(\tau)=\alpha e_2\tau, \quad Z_2=const, \\ R_\xi(t_1,t_2)=Z_2\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t_1,\tau)\varphi(t_2,\tau)d\tau . \end{gathered} \qquad (14)$$

Звідси видно, що для того, щоб ЛВП був періодично корельованим, інакше – щоб його кореляційна функція задовольняла умові:

$$R_\xi(t_1+T,t_2+T)=R_\xi(t_1,t_2), \quad t_1,t_2\in(-\infty;\infty) \qquad (15)$$

необхідно виконання умови:

$$\varphi(t+T,\tau)=\varphi(t,\tau), \quad t\in(-\infty;\infty),$$

тобто ядро ЛВП повинно бути періодичною за функцією.

2. Породжуючий процес ЛВП – неоднорідний, ядро ЛВП – стаціонарне. При цьому $\varphi(t,\tau)=\varphi(t-\tau)$ та

$$R_\xi(t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t_1,t_2+\tau)\varphi(\tau)dZ_2(t_2-\tau). \qquad (16)$$

В цьому випадку очевидно, що диференціал другого сем-інваріанту породжуючого процесу $\xi(t)$ повинен бути періодичною функцією часу:

$$dZ_2(t)=dZ_2(t+\tau), \quad t\in(-\infty;+\infty). \qquad (17)$$

Таким чином, згідно з (14) та (16) лінійний періодичний корельований випадковий процес можна розглядати або як відгук лінійної системи з періодичною імпульсною перехідною функцією на вплив у вигляді білого шуму [11], або як відгук стаціонарної лінійної системи на вплив у вигляді білого шуму з дисперсією, що змінюється періодично.

Слід зазначити, що поняття періодичного в широкому розумінні періодично корельованого випадкового процесу має велике значення в практичному застосуванні. Вперше поняття періодично корельованого випадкового процесу було введено Коронкевичем О.І. при дослідженні впливу випадкових процесів на лінійні резонансні системи. Подальший розвиток теорія ПКВП отримала у працях Гладишева Є.Г.

Величезний вплив на теорію ПКВП мало застосування введеного Лоєвим М. [12] поняття гармонізованості випадкових процесів. У працях Огури [14] та Драгана Я.П. [13] незалежно отримано центральний результат теорії ПКВП – спектральне представлення гармонізованого періодично корельованого випадкового процесу.

Розглянемо фізичне значення поняття гармонізованості періодично корельованих випадкових процесів. Будемо вважати, що дійсний гільбертовий випадковий процес $\{\xi(t); t\in(-\infty;\infty)\}$ з кореляційною функцією $R_\xi(t_1,t_2)$ називається гармонізованим, якщо допускає представлення у вигляді стохастичного інтеграла

$$\xi(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t}dz(\omega),\quad t\in(-\infty;\infty),\qquad(18)$$

де $\{z(\omega);\quad \omega\in(-\infty;\infty)$ – деяка гільбертова випадкова функція, кореляційна функція якої $F_{\xi}(\omega_1,\omega_2)$ є функцією обмеженої варіації. При цьому кореляційні функції $R_{\xi}(t_1,t_2)$ та $F_{\xi}(\omega_1,\omega_2)$ зв'язані співвідношенням:

$$R_{\xi}(t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\omega_1 t_1-\omega_2 t_2)}dF_{\xi}(\omega_1,\omega_2).\qquad(19)$$

Якщо кореляційна функція $R_{\xi}(t_1,t_2)$ представлена у вигляді (19), то її називають гармонізованою. Функція $F_{\xi}(\omega_1,\omega_2)$ залишається спектральною функцією, а випадкова функція $z(\omega)$ – породжуючою функцією випадкового процесу $\xi(t)$.

Теорема гармонізованості [12] свідчить про те, що випадковий процес гармонізований тоді і лише тоді, коли гармонізовано його кореляційну функцію і навпаки.

Особливий вигляд має кореляційний зв'язок гармонічних складових гармонізованого періодично корельованого випадкового процесу. Тут корельовано лише ті гармоніки, частоти яких відрізняються на величину кратну $2\pi/T$, де T – період корельованості ПКВП.

Таким чином, на запропоновану математичну модель ГЕН доцільно накласти умову гармонізованості. Ця умова корисна, наприклад, тим, що дозволяє коректно відобразити в математичній моделі поняття про частотні властивості ГЕН, які широко застосовуються.

В роботі [9] показано, що кожна періодично корельована випадкова послідовність є гармонізованою.

Згідно з проведеним вище аналізом можна зробити висновок, що отримання характеристик вихідного гармонізованого періодично корельованого випадкового процесу можна замінити отриманням авто- та взаємних спектральних і кореляційних функцій однорідних випадкових процесів

$$\xi_K(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t}dz(\omega)\sim\sum_{K=-N}^{N} e^{i\omega_K t}\Delta z_K\,.\qquad(20)$$

Отримання випадкових процесів відбувається шляхом полосової фільтрації вихідного випадкового процесу $\xi(t)$ в кубах частот [9].

Основним інструментом полосової фільтрації та спектрально-кореляційного аналізу випадкових процесів є алгоритм багатомірного швидкого перетворення Фур'є [15].

Пропонується такий алгоритм отримання характеристик реальних ГЕН, який базується на одній з основних властивостей ЛПВП – ергодичності дисперсії:

– обчислюємо 1-е прирощення:

$$Z\left(\frac{T}{i}\right)=X\left(\frac{T}{i}+1\right)-X\left(\frac{T}{i}\right),\quad \frac{T}{i}=\overline{1,N}\,;\qquad(21)$$

– обчислюємо оцінку математичного очікування для 1-х прирощень:

$$MX(I)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Z(I+kT),\quad k=\overline{1,T}\;;\qquad(22)$$

– оцінюємо дисперсію ПВП для 1-х прирощень:

$$DX(I)=\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\xi(I+kT)^2\,;\qquad(23)$$

де $\xi(\bullet)$ – центрований випадковий процес;

$$\xi(I+kT)=Z(I+kT)-MX(I);\qquad(24)$$

– обчислюємо оцінки коефіцієнтів Фур'є для дисперсії:

$$C_K=\frac{1}{T}\sum_{t=0}^{T-1} DX(I)e^{i2\pi kt/T},\quad k=-\overline{T/2,T}/2\,.\qquad(25)$$

Такий підхід дозволяє провести порівняльну оцінку електроспоживання серед однотипних об'єктів та висунути таку гіпотезу: однорідні об'єкти повинні мати однакові характеристики електроспоживання.

Повертаючись до питання вибору математичної моделі ГЕН з урахуванням проведеного вище аналізу, можна констатувати, що для подальших досліджень доцільно скористатись винятковим варіантом нестаціонарних періодичних випадкових процесів, а саме – мультиплікативною моделлю. Суть цього варіанта полягає в тому, що на систему, параметри якої періодично змінюються, впливає стаціонарний процес. У межах цього підходу ГЕН можна описати мультиплікативною моделлю такого вигляду:

$$\xi(t)=x(t)\omega(t),\qquad(26)$$

де $x(t)$ – довільний гільбертовий дійсний стаціонарний випадковий процес; $\omega(t)$ – детермінована невід'ємна періодична функція з інтегрованим за τ квадратом.

Мається на увазі, що породжуючий процес являє собою однорідний випадковий процес з незалежними прирощеннями, а ядро є функцією, періодичною за аргументом t.

Необхідно підкреслити, що даний метод моделювання не залежить від закону розподілу нестаціонарного випадкового процесу, який моделюється, отже, може бути використаний за будь-яких законах розподілу досліджуваних процесів.

Проведений аналіз ймовірних характеристик ГЕН промислових об'єктів і запропонований метод моделювання ГЕН промислових об'єктів показав, що це один з найадекватніших методів представлення фізичного тлумачення режиму енергопостачання.

Висновки

1. Проведено дослідження та аналіз графіків електричних навантажень за допомогою ймовірних характеристик: кореляційної функції, розподілу ймовірностей, математичного очікування та дисперсії. Аналіз показав, що ГЕН слід розглядати як нестаціонарний періодичний випадковий процес, оскільки всі його ймовірні характеристики є функціями часу.

2. Проведено теоретичний аналіз моделі ГЕН у вигляді лінійного періодичного випадкового процесу, який дає можливість накласти на неї умову гармонізованості.

3. Описано в загальному вигляді центральний результат теорії періодичних випадкових процесів – спектральне представлення гармонізованого періодичного в широкому розумінні випадкового процесу. Це дає підстави для отримання спектральних характеристик ГЕН, основаних на алгоритмах швидкого перетворення Фур'є.

4. Проведено дослідження закону розподілу ГЕН, який показав, що не для всіх досліджуваних об'єктів витримується нормальний закон. У зв'язку з цим в загальному вигляді закон розподілу ГЕН можна апроксимувати розподілом Вейбула-Гнеденко, який при $\lambda = 2{,}5$ та $\beta = 4 - 4{,}5$ приймає вигляд $\boldsymbol{F}$-розподілу.

1. Миколаєнко В.М. Аналіз ймовірних характеристик та моделювання графіків електричних навантажень промислових об'єктів, ІЕЕ НТУУ "КПІ". – К, 2005. – 18 с. – Укр.- Деп. в ДНТБ України. 1.02.05. № 3-Ук 2005

2. Цвєтков Е.І. Нестационарные случайные процессы и их анализ. – М.: Энергия, 1973. – 128 с.

3. Андерсон Т. Статистический анализ временных рядов. – М.: Мир. 1976. 755 с.

4. Бокс Дж., Дженкинс Г. Анализ временных рядов. – М.: Мир. 1974. 520 с.

5. Денискін В.В. Основи экономики. – М: Наука, 1982. – 338 с.

6. Мельдорф М.В., Тайгимяги Е.А. Апроксимация закона распределения нагрузки энергетической системы. Труды Таллинского политех.ин-та. Сер.А. 1974. №364. – С. 27-33.

7. Кудрин Б.И., Жичкин С.В. Учет технологических факторов при нормировании расходов электроэнергии и прогнозировании электропотребителей химических предприятий. Журнал Промышленная энергетика №12 – 2002. – с.24-28.

8. Ахмед Н., Рао К.Р. Ортогональные преобразования при обработке цифровы сигналов. – 1980.

9. Гладишев Е.Г. Периодические и почти периодические коррелированые случайные процессы с непрерывньм временем// Теория вероятностей и ее применение. – 1963. – Т.8. – С.184-189.

10. Коронкевич О.І. Спектральное разложение периодических и почти периодических случайных функций// Докл. АН УССР. 1974. Сер.А. – №2. -С.114-117.

11. Камаев Ю.П. Математическое моделирование сигналов и полей -1977.

12. Лозв М. Теория вероятностей. – М.: Из-во иностлитературы, 1962. – 720 с.

13. Драган Я.П. О спектральном представлений различных классов случайных процессов// В кн. Отбор и передача информации. – 1968. – Вып.16. -С.8-20.

14. Ogura H. Spectral representation of a periodic nonstationary rendom prosess. IEEE Trans. Inform. Theory. 1971. V.IT – 17.2. p. 143-149.

15. Ахмед Н., Рао К.Р. Ортогональные преобразования при обработке цифровы сигналов. 1980.

16. Жовинський В.М., Жовинський А.М. О корреляционном анализе одного класса нестационарных процессов// В кн. Преобраование и обработка информации. Изд-во Московского университета. 1972. С. 130-138.