Збірник праць Інституту математики НАН України 2006, т.3, N 2, 113–123

УДК 517.9

Про інтегровні тривимірні квантово-механічні системи в магнітному полі

О.Ю. ЖАЛІЙ

Інститут математики НАН України, Київ
E-mail: zhaliy@imath.kiev.ua

Робота присвячена побудові інтегровних тривимірних квантово-механічних систем з ненульовими магнітними полями. Розглядається існування пари взаємокомутуючих інтегралів руху не вище другого порядку за похідними. Більшість отриманих систем є новими і не співвідносяться з відокремленням змінних у відповідному рівнянні Шрьодінгера.

This paper is devoted to the construction of integrable three-dimensional quantum mechanical systems with magnetic fields. The existence of pairs of commuting integrals of motion not higher than second order in derivatives is considered. Most of the systems obtained are new and not related to the separation of variables in the corresponding Schrödinger equation.

Розглянемо стаціонарне рівняння Шрьодінгера для частинки, що рухається в зовнішньому електромагнітному полі в тривимірному евклідовому просторі

$$H\psi = E\psi, \quad H = \tfrac{1}{2}\vec{p}^{\,2} + V(x,y,z) + A_i(x,y,z)p_i + p_iA_i(x,y,z), \quad (1)$$

де $V(x,y,z)$ та $(A_1(x,y,z),\ A_2(x,y,z),\ A_3(x,y,z))$ – скалярний та векторний потенціали електромагнітного поля. Тут і надалі використовується позначення $\vec{p} = -ih\vec{\nabla}$, та за індексами, що повторюються йде підсумовування від 1 до 3.

За аналогією з класичною гамільтоновою механікою будемо вважати таку систему інтегровною, якщо існує пара квантово-механічних операторів P і Q, які комутують між собою, а також з гамільтоніаном H, тобто виконуються такі умови

$$[H,Q] = [H,P] = [P,Q] = 0.$$

Окрім цього, всі три оператори H, Q, P мають бути алгебраїчно незалежними, тобто жоден з них не може бути представлений поліномом від двох інших [1, 2].

В нашому дослідженні обмежимося випадком, коли оператори Q, P є квадратичними поліномами по $\vec{p}$

$$
\begin{aligned}
Q &= \alpha_{ik}(x,y,z)p_i p_k + f_i(x,y,z)p_i + u_1(x,y,z),\\
P &= \beta_{ik}(x,y,z)p_i p_k + g_i(x,y,z)p_i + u_2(x,y,z).
\end{aligned}
\tag{2}
$$

В класичній механіці інтегровні системи є цікавими, оскільки їх рух у фазовому просторі є більш впорядкованим, а саме обмежується тором. В квантовій механіці інтегровність n-вимірної квантово-механічної системи, тобто існування n інтегралів руху (операторів, що комутують між собою, та з оператором рівняння (1)), полегшує задачу визначення енергетичного спектру та хвильових функцій навіть тоді, коли з інтегровності не випливає відокремлення змінних, а лише так зване "квазі-відокремлення змінних" [3].

Отже задача опису всіх тих потенціалів електромагнітного поля V та A_1, A_2, A_3, для яких квантово-механічна задача є інтегровною в означенному вище сенсі, є важливою і актуальною.

У випадку чисто скалярного потенціалу, тобто коли магнітне поле відсутнє, для тривимірного випадку цю задачу було розв'язано в 1967-му році Я.А. Смородінським та його учнями [4, 5]. Вони довели, що з факту існування пари інтегралів руху першого або другого порядку по $\vec{p}$ (в означеному вище сенсі) випливає можливість відокремлення змінних у відповідному рівнянні Шрьодінгера [5] та навпаки [4]. А отже, отримані ними 11 класів інтегровних потенціалів V повністю співпали з результатами класичної роботи Ейзенхарта [6], де він ще у 1948-му році описав всі скалярні потенціали, при яких відповідне рівняння Шрьодінгера (або ж рівняння Гамільтона-Якобі у випадку класичної механіки) допускає відокремлення змінних хоча б в одній із 11 систем координат.

Наступний крок зробив у 1972-му році В.Н. Шаповалов зі співавторами [7], які отримали повний опис вектор-потенціалів з ненульовим магнітним полем, при яких відповідне рівняння Шрьодінгера (1) допускає відокремлення змінних хоча б в одній із 11 вищезгаданих систем координат, та виписали відповідні пари операторів першого та другого порядків, які комутують між собою та з оператором рівняння.

Подальші результати в цьому напрямі пов'язані з роботами групи П. Вінтерніца [8–10]. Для двовимірного випадку було встановлено, що в магнітному полі з існування інтегралів руху другого порядку не обов'язково слідує відокремлення змінних. Хоча при цьому інтеграли руху все ще класифікуються на класи еквівалентності під дією групи Евкліда, причому члени другого порядку по p_i в них мають таку ж саму форму, як і у випадку чисто скалярного потенціалу. Також було показано, що в магнітному полі квантовий випадок [10] вже не обов'язково збігається з класичним [8,9]: отримані вектор-потенціали можуть залежати від сталої Планка $\hbar$ нетривіальним чином.

В даній роботі робиться наступний крок в класифікації потенціалів електромагнітного поля V та $\vec{A}$ в тривимірному евклідовому просторі, при яких відповідна квантово-механічна система, що описується рівнянням (1), є інтегровною в означеному вище сенсі, тобто для яких існує пара операторів (2), що комутують між собою, а також з оператором рівняння. Як результат, ми отримаємо цілу низку вектор-потенціалів, для яких відповідне рівняння Шрьодінгера (1) є інтегровним в означеному вище сенсі, але при цьому не допускає відокремлення змінних, а отже ці потенціали не містяться в класифікації Шаповалова [7] і тому є новими.

Спочатку ми розглянемо один оператор Q вигляду (2), який комутує з оператором рівняння Шрьодінгера H вигляду (1). Комутатор $[Q, H]$ буде містити в собі члени третього, другого, першого, та нульового порядків по p_i, коефіцієнти при яких ми маємо покласти рівними нулеві. Коефіцієнти при третій степені p_i дають таку систему рівнянь:

$$\frac{\partial \alpha_{ik}}{\partial x_m} p_m p_i p_k = 0.$$

Після розв'язання цієї системи ми маємо наступний результат: розглядуваний оператор Q може бути представлений як симетричний білінійний поліном по генераторам групи рухів тривимірного евклідового простору E_3, тобто групи симетрій тривимірного рівняння Шрьодінгера для вільної частинки (рівняння Гельмгольца):

$$\begin{aligned} Q = a_{ik} M_i M_k + b_{ik}(p_i M_k + M_k p_i) + c_{ij} p_i p_k + \\ + f_i(x, y, z) p_i + u_1(x, y, z), \end{aligned} \tag{3}$$

де a_{ik}, b_{ik} та c_{ij} є константами, а M_i – оператор повороту, а саме $M_i = \varepsilon_{ikl} x_k p_l$, де ε_{ikl} – повністю антисиметричний тензор.

Порівнюючи отриманий вигляд оператора (3) з аналогічним виглядом для випадку чисто скалярного потенціалу [5] робимо висновок, що члени другого порядку по p_i в операторах залишаються незмінними і після появи ненульового магнітного поля (як і в двовимірному випадку [10]).

А тому, за повною аналогією з роботою [5], пара комутуючих операторів P, Q вигляду (3) може бути зведена поворотами та зсувами системи координат, а також перетвореннями виду

$$Q' = \mu P + \nu Q + \lambda H$$

до одного з 11 класів, що відповідають класичним 11 ортогональним системам координат, які дозволяють відокремлення змінних у тривимірному рівнянні Шрьодінгера для вільної частинки.

Тому в нашому випадку ненульового магнітного поля ми отримаємо члени другого порядку по p_i в цих комутуючих 11 парах операторів P, Q такі ж самі, як і в роботі [5]. Але, на відміну від чисто скалярного випадку, в наших операторах залишаються також ненульові коефіцієнти при членах p_i першого порядку, які є довільними функціями, від вигляду яких в решті решт і залежить вигляд магнітного поля (у скалярному випадку вони дорівнюють нулеві), як це буде показано далі.

В цій статті нам вдалося повністю розв'язати найпростіший "декартовий" випадок, тобто коли пара P, Q має вигляд:

$$Q = p_1^2 + \vec{f}(x,y,z)\vec{p} + u_1(x,y,z),$$
$$P = p_2^2 + \vec{g}(x,y,z)\vec{p} + u_2(x,y,z).$$

Прирівнюючи в рівності $[H,Q] = [H,P] = [P,Q] = 0$ коефіцієнти при незалежних степенях p_i до нуля, ми отримаємо перевизначену систему нелінійних диференціальних рівнянь с частинними похідними для невідомих функцій f_1, f_2, f_3, g_1, g_2, g_3, u_1, u_2 і V, A_1, A_2, A_3.

Коефіцієнти при вищих степенях p_i дають таку систему:

$$f_2 = f_2(x), \quad f_3 = f_3(x), \quad g_1 = g_1(y), \quad g_3 = g_3(y), \quad f_{1y} = g_{2x},$$
$$f_2'(x) + f_{1y} = 4A_{2x}, \quad g_3'(y) + g_{2z} = 4A_{3y}, \quad 4A_{1x} = f_{1x},$$
$$f_3'(x) + f_{1z} = 4A_{3x}, \quad g_1'(y) + g_{2x} = 4A_{1y}, \quad 4A_{2y} = g_{2y}.$$

Її загальним розв'язком для $\vec{A}$ буде

$$4A_1 = s_x + k_{1x} + g_1(y) + r_1(z), \quad 4A_2 = s_y + k_{2y} + f_2(x) + r_2(z),$$

$$4A_3 = s_z + k_{1z} + k_{2z} + f_3(x) + g_3(y) + r_3'(z),$$

де $s = s(x,y,z)$, $k_1 = k_1(x,z)$, $k_2 = k_2(y,z)$.

Калібровне перетворення

$$\vec{A} \to \vec{A} + \vec{\nabla}F, \quad F = s(x,y,z) + k_1(x,z) + k_2(y,z) + r_3(z).$$

спрощує вираз для $\vec{A}$ до такого

$$\begin{aligned} A_1 &= \tfrac{1}{4}(g_1(y) + r_1(z)), \\ A_2 &= \tfrac{1}{4}(f_2(x) + r_2(z)), \\ A_3 &= \tfrac{1}{4}(f_3(x) + g_3(y)). \end{aligned}$$

Маючи цей вираз для $\vec{A}$, ми отримаємо з коефіцієнтів при нижчих степенях p_i наступну систему для функцій $g_1(y)$, $r_1(z)$, $f_2(x)$, $r_2(z)$, $f_3(x)$, $g_3(y)$:

$$\begin{aligned} f_2(x)g_3'(y) &= g_1(y)f_3'(x), \\ r_1(z)f_2'(x) &= f_3(x)r_2'(z), \\ r_2(z)g_1'(y) &= g_3(y)r_1'(z). \end{aligned} \tag{4}$$

Очевидно, що рівняння Шрьодінгера з вектор-потенціалом (1) є інваріантним відносно перестановок A_1, A_2, A_3, що відбуваються одночасно з x_1, x_2, x_3. При цьому рівняння (4) є інваріантними відносно перестановок функцій $g_1(y)$, $r_1(z)$, $f_2(x)$, $r_2(z)$, $f_3(x)$, $g_3(y)$. Ці перетворення еквівалентності можна зобразити таким чином:

$$\begin{pmatrix} f_2 & g_3 & r_1 \\ f_3 & g_1 & r_2 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ x & y & z \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} r_1 & f_2 & g_3 \\ r_2 & f_3 & g_1 \\ A_3 & A_1 & A_2 \\ z & x & y \end{pmatrix} \sim$$
$$\begin{pmatrix} g_3 & r_1 & f_2 \\ g_1 & r_2 & f_3 \\ A_2 & A_3 & A_1 \\ y & z & x \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} f_3 & r_2 & g_1 \\ f_2 & r_1 & g_3 \\ A_1 & A_3 & A_2 \\ x & z & y \end{pmatrix} \sim$$
$$\begin{pmatrix} g_1 & f_3 & r_2 \\ g_3 & f_2 & r_1 \\ A_2 & A_1 & A_3 \\ y & x & z \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} r_2 & g_1 & f_3 \\ r_1 & g_3 & f_2 \\ A_3 & A_2 & A_1 \\ z & y & x \end{pmatrix}.$$

Використовуючи це відношення еквівалентності, нам вдалося повністю описати всі розв'язки системи (4). Це, в свою чергу дало нам опис всіх можливих форм вектор-потенціалів $\vec{A}$. Коефіцієнти при степенях p_i, що залишилися, служать для визначення форми скалярної компоненти вектор-потенціалу V і накладають деякі додаткові обмеження на $g_1(y)$, $r_1(z)$, $f_2(x)$, $r_2(z)$, $f_3(x)$, $g_3(y)$.

Внизу ми наводимо остаточні результати наших обчислень. Тут і надалі $\vec{\Omega}$ позначає магнітне поле, а саме $\vec{\Omega} = \operatorname{rot} \vec{A}$.

Випадок 1.

$$\vec{A} = 0, \quad \vec{\Omega} = 0, \qquad Q = p_1^2 + 2u_1(x),$$
$$V = u_1(x) + u_2(y) + u_3(z), \qquad P = p_2^2 + 2u_2(y).$$

Цей випадок відповідає нульовому магнітному полю і міститься в класифікації Ейзенхарта [6]. Згідно його результатів такий вигляд для скалярного потенціалу $V = u_1(x) + u_2(y) + u_3(z)$ вичерпує всі скалярні потенціали, при яких відповідне рівняння Шрьодінгера допускає відокремлення змінних в декартовій системі координат.

Випадок 2.

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} v_1(z) \\ v_2(z) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\Omega} = \begin{pmatrix} -v_2'(z) \\ v_1'(z) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V = v_3(z), \quad \begin{matrix} Q = p_1^2, \\ P = p_2^2. \end{matrix}$$

Випадок 3.

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f(x) + g(y) \end{pmatrix}, \quad \vec{\Omega} = \begin{pmatrix} g'(y) \\ -f'(x) \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$V = u_1(x) + u_2(y), \qquad \begin{matrix} Q = p_1^2 + 4f(x)p_3 + 2u_1(x), \\ P = p_2^2 + 4g(y)p_3 + 2u_2(y). \end{matrix}$$

Випадки 2–3 були отримані в класифікації Шаповалова та співавторів [7]. Згідно їх результатів ці два випадки вичерпують всі вектор-потенціали з ненульовим магнітним полем, при яких відповідне рівняння Шрьодінгера допускає відокремлення змінних в декартовій системі координат.

Наступні випадки не пов'язані з відокремленням змінних, а отже ці потенціали не містилися в класифікації Шаповалова [7] і тому є новими.

Випадок 4.

$$
\begin{aligned}
\vec{A} &= \begin{pmatrix} g'(y) \\ f'(x) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f''(x) - g''(y) \end{pmatrix}, \\
V &= -(C_3 f(x) + C_3 g(y) + \\
&\quad + 2C_2 f^2(x) + 2C_1 g^2(y) + r(z) + 4g(y)f''(x) + 4f(x)g''(y)), \\
Q &= p_1^2 + 4f'(x)p_2 - 2(4g(y)f''(x) + 2C_2 f(x)^2 + C_3 f(x)), \\
P &= p_2^2 + 4g'(y)p_1 - 2(4f(x)g''(y) + 2C_1 g(y)^2 + C_3 g(y)),
\end{aligned}
$$

де функції $f(x)$ та $g(y)$ є розв'язками рівнянь

$$
f''(x) = Cf^2(x) + C_1 f(x) + C_4, \quad g''(y) = Cg^2(y) + C_2 g(y) + C_5.
$$

При $C = 0$ це є лінійні рівняння другого порядку. Випадок $C \neq 0$ більш цікавий: коли ще при цьому і $C_1 \neq 0$ (або ж, відповідно, $C_2 \neq 0$), то їх розв'язками будуть перші трансцеденти Пенлеве, а якщо ж $C_1 = 0$ (або ж, відповідно, $C_2 = 0$), то маємо справу с рівнянням Вейерштраса, розв'язки якого виражаються або ж через функції Вейерштраса, або ж через елементарні функції, в залежності від параметру C_4 (або ж, відповідно, C_5) та констант інтегрування. Деталі можна знайти, наприклад, в довіднику Камке [11].

Випадок 5.

$$
\begin{aligned}
\vec{A} &= \begin{pmatrix} g'(y) \\ f'(x) \\ Cf(x) + Cg(y) \end{pmatrix}, \quad \vec{\Omega} = \begin{pmatrix} Cg'(y) \\ -Cf'(x) \\ f''(x) - g''(y) \end{pmatrix}, \\
V &= -(r + C_3 f(x) + C_3 g(y) + \\
&\quad + 2C_2 f^2(x) + 2C_1 g^2(y) + 4g(y)f''(x) + 4f(x)g''(y)), \\
Q &= p_1^2 + 4(f'(x)p_2 + Cf(x)p_3) - \\
&\quad - 2(4g(y)f''(x) + 2C_2 f(x)^2 + C_3 f(x)), \\
P &= p_2^2 + 4(g'(y)p_1 + Cg(y)p_3) - \\
&\quad - 2(4f(x)g''(y) + 2C_1 g(y)^2 + C_3 g(y)),
\end{aligned}
$$

де функції $f(x)$ та $g(y)$ є розв'язками рівнянь

$$
f''(x) = C_6 f^2(x) + C_1 f(x) + C_4,
$$

$$g''(y) = C_6 g^2(y) + C_2 g(y) + C_5,$$

які розв'язуються аналогічно до попереднього випадку.

Випадок 6.

$$\vec{A} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} w_1'(y) + v_1'(z) \\ u_2'(x) + v_2'(z) \\ u_3'(x) + w_3'(y) \end{pmatrix}, \quad \vec{\Omega} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} w_3''(y) - v_2''(z) \\ v_1''(z) - u_3''(x) \\ u_2''(x) - w_1''(y) \end{pmatrix},$$

$$V = -\frac{1}{4}(r + u_1(x) + w_2(y) + v_3(z) + w_1(y)u_2''(x) + v_1(z)u_3''(x) + \\ + u_2(x)w_1''(y) + v_2(z)w_3''(y) + u_3(x)v_1''(z) + w_3(y)v_2''(z)),$$

$$Q = p_1^2 + u_2'(x)p_2 + u_3'(x)p_3 - \\ - \frac{1}{2}(w_1(y)u_2''(x) + v_1(z)u_3''(x) + u_1(x)),$$

$$P = p_2^2 + w_1'(y)p_1 + w_3'(y)p_3 - \\ - \frac{1}{2}(u_2(x)w_1''(y) + v_2(z)w_3''(y) + w_2(y)),$$

де функції $u_2(x)$, $u_3(x)$, $w_1(y)$, $w_3(y)$, $v_1(z)$, $v_2(z)$, $u_1(x)$, $w_2(y)$, $v_3(z)$ визначені конкретним чином, та розбиваються в свою чергу на чотири випадки:

Випадок 6.1.

$$u_2(x) = a_3(r_1\cosh(a_1x) + k_1\sinh(a_1x)),$$
$$u_3(x) = a_2(r_1\sinh(a_1x) + k_1\cosh(a_1x)),$$
$$w_1(y) = a_3(r_2\cosh(a_2y) + k_2\sinh(a_2y)),$$
$$w_3(y) = a_1(r_2\sinh(a_2y) + k_2\cosh(a_2y)),$$
$$v_1(z) = a_2(r_3\cosh(a_3z) + k_3\sinh(a_3z)),$$
$$v_2(z) = a_1(r_3\sinh(a_3z) + k_3\cosh(a_3z)),$$
$$u_1(x) = \frac{1}{4}a_2^2a_3^2((r_1^2 + k_1^2)\cosh(2a_1x) + 2r_1k_1\sinh(2a_1x)) + \\ + C(r_1\cosh(a_1x) + k_1\sinh(a_1x)),$$
$$w_2(y) = \frac{1}{4}a_1^2a_3^2((r_2^2 + k_2^2)\cosh(2a_2y) + 2r_2k_2\sinh(2a_2y)) + \\ + C(r_2\cosh(a_2y) + k_2\sinh(a_2y)),$$
$$v_3(z) = \frac{1}{4}a_1^2a_2^2((r_3^2 + k_3^2)\cosh(2a_3z) + 2r_3k_3\sinh(2a_3z)) + \\ + C_1(r_3\cosh(a_3z) + k_3\sinh(a_3z))$$

з 5 можливими підвипадками:

$$a) \quad C = 0, \quad C_1 = 0;$$

$b)\ \ r_1 = k_1, \quad r_2 = k_2, \quad r_3 = k_3, \quad C_1 = C;$

$c)\ \ r_1 = k_1, \quad r_2 = -k_2, \quad r_3 = -k_3, \quad C_1 = C;$

$d)\ \ r_1 = -k_1, \quad r_2 = k_2, \quad r_3 = -k_3, \quad C_1 = -C;$

$e)\ \ r_1 = -k_1, \quad r_2 = -k_2, \quad r_3 = k_3, \quad C_1 = -C.$

Випадок 6.2.

$$
\begin{aligned}
u_2(x) &= a_3(r_1\sin(a_1x) - k_1\cos(a_1x)),\\
u_3(x) &= a_2(r_1\cos(a_1x) + k_1\sin(a_1x)),\\
w_1(y) &= a_3(r_2\sin(a_2y) - k_2\cos(a_2y)),\\
w_3(y) &= a_1(r_2\cos(a_2y) + k_2\sin(a_2y)),\\
v_1(z) &= a_2(r_3\cosh(a_3z) + k_3\sinh(a_3z)),\\
v_2(z) &= a_1(r_3\sinh(a_3z) + k_3\cosh(a_3z)),\\
u_1(x) &= \tfrac{1}{4}a_2^2a_3^2((r_1^2 - k_1^2)\cos(2a_1x) + 2r_1k_1\sin(2a_1x)) +\\
&\quad + C(r_1\sin(a_1x) - k_1\cos(a_1x)),\\
w_2(y) &= \tfrac{1}{4}a_1^2a_3^2((r_2^2 - k_2^2)\cos(2a_2y) + 2r_2k_2\sin(2a_2y)) +\\
&\quad + C(r_2\sin(a_2y) - k_2\cos(a_2y)),\\
v_3(z) &= -\tfrac{1}{4}a_1^2a_2^2((r_3^2 + k_3^2)\cosh(2a_3z) + 2r_3k_3\sinh(2a_3z)) +\\
&\quad + C_1(r_3\cosh(a_3z) + k_3\sinh(a_3z))
\end{aligned}
$$

з 5 можливими підвипадками:

$a)\ \ C = 0, \quad C_1 = 0;$

$b)\ \ r_1 = ik_1, \quad r_2 = -ik_2, \quad r_3 = -k_3, \quad C_1 = iC;$

$c)\ \ r_1 = ik_1, \quad r_2 = ik_2, \quad r_3 = k_3, \quad C_1 = iC;$

$d)\ \ r_1 = -ik_1, \quad r_2 = -ik_2, \quad r_3 = k_3, \quad C_1 = -iC;$

$e)\ \ r_1 = -ik_1, \quad r_2 = ik_2, \quad r_3 = -k_3, \quad C_1 = -iC.$

Випадок 6.3.

$$
\begin{aligned}
u_2(x) &= a_3(r_1\cos(a_1x) + k_1\sin(a_1x)),\\
u_3(x) &= ia_2(r_1\sin(a_1x) - k_1\cos(a_1x)),\\
w_1(y) &= a_3(r_2\cos(a_2y) + k_2\sin(a_2y)),\\
w_3(y) &= ia_1(r_2\sin(a_2y) - k_2\cos(a_2y)),\\
v_1(z) &= a_2(r_3\cos(a_3z) + k_3\sin(a_3z)),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&v_2(z) = ia_1(r_3\sin(a_3z) - k_3\cos(a_3z)),\\
&u_1(x) = -\tfrac{1}{4}a_2^2a_3^2((r_1^2 - k_1^2)\cos(2a_1x) + 2r_1k_1\sin(2a_1x)) +\\
&\qquad + C(r_1\cos(a_1x) + k_1\sin(a_1x)),\\
&w_2(y) = -\tfrac{1}{4}a_1^2a_3^2((r_2^2 - k_2^2)\cos(2a_2y) + 2r_2k_2\sin(2a_2y)) +\\
&\qquad + C(r_2\cos(a_2y) + k_2\sin(a_2y)),\\
&v_3(z) = -\tfrac{1}{4}a_1^2a_2^2((r_3^2 - k_3^2)\cos(2a_3z) + 2r_3k_3\sin(2a_3z)) +\\
&\qquad + C_1(r_3\sin(a_3z) - k_3\cos(a_3z))
\end{aligned}
$$

з 5 можливими підвипадками:

$a)$ $C = 0, \quad C_1 = 0;$

$b)$ $r_1 = ik_1, \quad r_2 = -ik_2, \quad r_3 = ik_3, \quad C_1 = iC;$

$c)$ $r_1 = -ik_1, \quad r_2 = -ik_2, \quad r_3 = -ik_3, \quad C_1 = iC;$

$d)$ $r_1 = -ik_1, \quad r_2 = ik_2, \quad r_3 = ik_3, \quad C_1 = -iC;$

$e)$ $r_1 = ik_1, \quad r_2 = ik_2, \quad r_3 = -ik_3, \quad C_1 = -iC.$

Випадок 6.4.

$$
\begin{aligned}
&u_2(x) = a_3(r_1\cosh(a_1x) + k_1\sinh(a_1x)),\\
&u_3(x) = -ia_2(r_1\sinh(a_1x) + k_1\cosh(a_1x)),\\
&w_1(y) = a_3(r_2\cosh(a_2y) + k_2\sinh(a_2y)),\\
&w_3(y) = -ia_1(r_2\sinh(a_2y) + k_2\cosh(a_2y)),\\
&v_1(z) = a_2(r_3\cos(a_3z) + k_3\sin(a_3z)),\\
&v_2(z) = ia_1(r_3\sin(a_3z) - k_3\cos(a_3z)),\\
&u_1(x) = \tfrac{1}{4}a_2^2a_3^2((r_1^2 + k_1^2)\cosh(2a_1x) + 2r_1k_1\sinh(2a_1x)) +\\
&\qquad + C(r_1\cosh(a_1x) + k_1\sinh(a_1x)),\\
&w_2(y) = \tfrac{1}{4}a_1^2a_3^2((r_2^2 + k_2^2)\cosh(2a_2y) + 2r_2k_2\sinh(2a_2y)) +\\
&\qquad + C(r_2\cosh(a_2y) + k_2\sinh(a_2y)),\\
&v_3(z) = \tfrac{1}{4}a_1^2a_2^2((r_3^2 - k_3^2)\cos(2a_3z) + 2r_3k_3\sin(2a_3z)) +\\
&\qquad + C_1(r_3\sin(a_3z) - k_3\cos(a_3z))
\end{aligned}
$$

з 5 можливими підвипадками:

$a)$ $C = 0, \quad C_1 = 0;$

$b)$ $r_1 = -k_1, \quad r_2 = -k_2, \quad r_3 = -ik_3, \quad C_1 = C;$

$c)\ r_1 = k_1, \quad r_2 = -k_2, \quad r_3 = ik_3, \quad C_1 = C;$

$d)\ r_1 = k_1, \quad r_2 = k_2, \quad r_3 = -ik_3, \quad C_1 = -C;$

$e)\ r_1 = -k_1, \quad r_2 = k_2, \quad r_3 = ik_3, \quad C_1 = -C.$

Таким чином, ми отримали цілу низку нових вектор-потенціалів, для яких відповідне рівняння Шрьодінгера (1) є інтегровним в означеному вище сенсі, але при цьому не допускає відокремлення змінних, і для яких відповідну квантово-механічну задачу визначення енергетичного спектру та хвильових функцій можна спробувати розв'язати за допомогою, наприклад, квазі-відокремлення змінних [3].

Автор вдячний Павлові Вінтерніцу за корисні дискусії. Робота була підтримана NATO Reintegration Grant NUKR.RIG 982038 та грантом Президента України для підтримки наукових досліджень молодих вчених GP/F11/0061.

[1] Hietarinta J. Pure quantum integrability // Phys. Lett. A. – 1998. – **246**. – P. 97–104.

[2] Hietarinta J. Classical vs quantum integrability // J. Math. Phys. – 1984. – **25**. – P. 1833–1840.

[3] Hudon C., Winternitz P. Quasiseparation of variables in the Schrödinger equation with a magnetic field, math-ph/0502046

[4] Смородинский Я.А., Тугов И.И. О полных наборах наблюдаемых // ЖЭТФ – 1966. – **50**. – С. 653–659.

[5] Makarov A.A., Smorodinsky J.A., Valiev Kh., Winternitz P. A systematic search for nonrelativistic systems with dynamical symmetries // Nuovo Cimento A – 1967. – **52**. – P. 1061–1084.

[6] Eisenhart L.P. Enumeration of potentials for which one–particle Schroedinger equations are separable // Phys. Rev. – 1948. – **74**. – P. 87–89.

[7] Шаповалов В.Н., Багров В.Г., Мешков А.Г. Разделение переменных в стационарном уравнении Шредингера // Изв. вузов СССР, Физика. – 1972. – № 8. – С. 45–50.

[8] Dorizzi B., Grammaticos B., Ramani A., Winternitz P. Integrable Hamiltonian systems with velocity-dependent potentials // J. Math. Phys. – 1985. – **26**. – P. 3070–3079.

[9] McSween E., Winternitz P. Integrable and superintegrable Hamiltonian systems in magnetic fields // J. Math. Phys. – 2000. – **41**. – P. 2957–2967.

[10] Berube, J., Winternitz P. Integrable and superintegrable quantum systems in a magnetic field // J. Math. Phys. – 2004. – **45**. – P. 1959–1973.

[11] Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – Москва: Наука, 1976. – 576 с.