DOI: 10.37863/umzh.v75i1.7394

УДК 517.968.2

О. А. Бойчук (Ін-т математики НАН України, Київ),
В. П. Журавльов[1] (Поліс. нац. ун-т, Житомир)

РОЗВ'ЯЗНІСТЬ ЛІНІЙНИХ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З НЕВИРОДЖЕНИМ ЯДРОМ У ГІЛЬБЕРТОВИХ ПРОСТОРАХ

By using the theory of pseudoinversion of operators and generalized inversion of integral operators, we obtain a criterion for the solvability of integro-ifferential equations with nondegenerate kernel in Hilbert spaces.

Із використанням теорії псевдообернення операторів і узагальненого обернення інтегральних операторів отримано критерій розв'язності інтегро-диференціальних рівнянь з невиродженим ядром у гільбертових просторах.

Ця робота є продовженням досліджень, які були розпочаті в [1], з вивчення умов розв'язності та побудови загальних розв'язків інтегро-диференціальних рівнянь з виродженим ядром у банахових просторах.

Встановлення умов розв'язності не скрізь розв'язних операторних рівнянь у банахових просторах є достатньо нетривіальною задачею. Загальні підходи до дослідження таких рівнянь розроблено у багатьох роботах (див., наприклад, [2 – 4].

Інтегро-диференціальні рівняння належать саме до такого типу рівнянь, оскільки інтегро-диференціальний оператор не має оберненого [5, 6]. Такі рівняння в евклідових просторах розглядалися в роботах [6, 7].

У роботі [1] з використанням теорії узагальненого обернення операторів і узагальненого обернення інтегральних операторів [4, 8] отримано умови розв'язності та загальний вигляд розв'язків інтегро-диференціальних рівнянь у банахових просторах. Ці результати застосовано для отримання критерію розв'язності та загального вигляду розв'язків лінійних крайових задач для інтегро-диференціальних рівнянь з виродженим ядром у банахових просторах [9].

Дослідження інтегро-диференціальних рівнянь з невиродженим ядром у гільбертових просторах авторам невідомі, тому із застосуванням ортопроєкторів та псевдообернених операторів у роботі отримано умови існування та загальний вигляд розв'язків інтегро-диференціальних рівнянь у гільбертових просторах.

Постановка задачі. Нехай $\mathbf{H}$ — дійсний гільбертовий простір зі скалярним добутком $(x, y)_{\mathbf{H}}$, $\mathcal{I} = [a, b]$ — скінченний проміжок, $z(t)$ — функція зі значеннями у гільбертовому просторі $\mathbf{H}$. На множині таких функцій визначимо скалярний добуток $(z(t), g(t)) = \int_a^b z(t)^* g(t)dt$, де $*$ — операція транспонування. Таким чином визначено гільбертовий простір $\mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{H})$, норма в якому визначається через скалярний добуток $||z(t)||_{\mathbf{L}_2(\mathcal{I},\mathbf{H})} = \sqrt{(z(t), z(t))_{\mathbf{H}}} = \sqrt{\int_a^b ||z(t)||^2_{\mathbf{H}} dt}$.

Розглянемо інтегро-диференціальне рівняння

[1] Відповідальний за листування, e-mail: vfz2008@ukr.net.

$$\dot{z}(t) - \int\limits_a^b [K_1(t,s)z(s) + K_2(t,s)\dot{z}(s)]ds = f(t), \tag{1}$$

де ядра $K_1(t,s)$, $K_2(t,s)$ сумовні з квадратом в області $\mathcal{I}\times\mathcal{I}$ та діють із гільбертового простору $\mathbf{H}$ у $\mathbf{H}$ по кожній змінній, функція $f(t) \in \mathbf{L}_2(\mathcal{I},\mathbf{H})$.

Розв'язок будемо шукати у класі таких функцій $z(t)$, що $z(t) \in \mathbf{D}_2(\mathcal{I},\mathbf{H})$, $\dot{z}(t) \in \mathbf{L}_2(\mathcal{I},\mathbf{H})$, де $\mathbf{D}_2(\mathcal{I},\mathbf{H})$ — простір абсолютно неперервних функцій. Індекс 2 вказує на його зв'язок з простором $\mathbf{L}_2(\mathcal{I},\mathbf{H})$ у тому сенсі, що похідні функцій з $\mathbf{D}_2(\mathcal{I},\mathbf{H})$ належать простору $\mathbf{L}_2(\mathcal{I},\mathbf{H})$.

Ставиться задача отримати умову розв'язності та знайти структуру розв'язків рівняння (1).

Розв'язок інтегро-диференціального рівняння у гільбертовому просторі. У рівнянні (1) виконаємо заміну $\dot{z}(t) = y(t)$ або

$$z(t) = \int\limits_a^t y(s)ds + c_0, \quad c_0 \in \mathbf{H}. \tag{2}$$

Тоді рівняння (1) зведеться до інтегрального рівняння

$$y(t) - \int\limits_a^b \left\{ K_1(t,s)\left[\int\limits_a^s y(\tau)d\tau + c_0\right] + K_2(t,s)y(s)\right\}ds = f(t). \tag{3}$$

Змінивши в інтегралі $\int_a^b K_1(t,s)\int_a^s y(\tau)d\tau ds$ порядок інтегрування, з (3) отримаємо інтегральне рівняння

$$y(t) - \int\limits_a^b K(t,s)y(s)ds = g(t), \tag{4}$$

де

$$K(t,s) = \int\limits_s^b K_1(t,\tau)d\tau + K_2(t,s), \quad g(t) = f(t) + \int\limits_a^b K_1(t,s)ds\, c_0.$$

Застосуємо до розв'язання інтегрального рівняння (4) методику з [10, с. 260].

Нехай $\{\varphi_i(t)\}_{i=1}^{\infty}$ — базис Шаудера гільбертового простору $\mathbf{L}_2(\mathcal{I},\mathbf{H})$ [11]. Складемо з базисних функцій $\varphi_i(t)$, $i = \overline{1,\infty}$, зліченновимірний вектор

$$\varPhi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_i(t), \ldots).$$

Тоді будь-яку функцію $y(t)$ з простору $\mathbf{L}_2(\mathcal{I},\mathbf{H})$ можна записати у вигляді

$$y(t) = \varPhi(t)\bar{y},$$

де $\bar{y}$ — вектор-стовпець, компоненти якого $\bar{y}_i = (\varphi_i(t)\cdot y(t)) = \int_a^b \varphi_i(t)y(t)dt$, $i = \overline{1,\infty}$, є коефіцієнтами Фур'є вектор-функції $y(t)$ за базисом $\{\varphi_i(t)\}_{i=1}^{\infty}$, тобто

$$\bar{y} = \int_a^b \Phi^*(t)y(t)dt.$$

Врахувавши вищевикладене, утворимо коефіцієнти Фур'є функцій $y(t)$, $f(t)$ та сталі c_0 [10, c. 266; 12]

$$\bar{y} = \int_a^b \Phi^*(t)y(t)dt, \quad \bar{f} = \int_a^b \Phi^*(t)f(t)dt, \quad \bar{c}_0 = \int_a^b \Phi^*(t)c_0 dt. \tag{5}$$

Далі утворимо коефіцієнти Фур'є ядер $K(t,s)$ і $K_1(t,s)$ як функцій змінної s

$$K(t) = \int_a^b \Phi^*(s)K(t,s)ds, \quad W(t) = \int_a^b \Phi^*(s)K_1(t,s)ds,$$

а потім коефіцієнти Фур'є отриманих функцій за змінною t

$$K = \int_a^b \int_a^b \Phi^*(s)K(t,s)\Phi(t)dsdt, \quad W = \int_a^b \int_a^b \Phi^*(s)K_1(t,s)\Phi(t)dsdt. \tag{6}$$

Застосовуючи вирази (5), (6) до інтегрального рівняння (4), отримуємо зліченну систему алгебраїчних рівнянь

$$\bar{y} - K\bar{y} = \bar{f} + W\bar{c}_0, \tag{7}$$

або

$$D\bar{y} = \bar{f} + W\bar{c}_0, \tag{8}$$

де оператор $D = \{d_{ij}\}_{i,j=1}^{\infty} = I - K$.

Під розв'язком системи (8) будемо розуміти послідовність чисел $\{\bar{y}^{(j)}\}_{j=1}^{\infty}$, при підстановці яких у рівняння (8) усі ряди $\sum_{j=1}^{\infty} d_{ij}\bar{y}^{(j)}$ будуть збіжними, а їхні суми будуть збігатися з вільними членами правої частини [11]. Очевидно, що оператор D є лінійним.

Нехай $D\colon \mathbf{H} \to \mathbf{H}$ — обмежений нормально розв'язний оператор.

Нормальна розв'язність оператора D означає, що він псевдооборотний і існують обмежені ортопроєктори $P_{N(D)}$, $P_{N(D^*)}$ на нуль-простір $N(D)$ і нуль-простір $N(D^*)$ спряженого оператора D^* та обмежений псевдообернений оператор D^+ до оператора D [4].

Відомо [4], що при виконанні умови

$$P_{N(D^*)}\big\{\bar{f} + W\bar{c}_0\big\} = 0, \tag{9}$$

і лише при ній, операторне рівняння (8) має сім'ю розв'язків

$$\bar{y} = P_{N(D)}\tilde{y} + D^+\{f + W\bar{c}_0\}, \tag{10}$$

де $\tilde{y}$ — довільний вектор гільбертового простору $\mathbf{H}$.

З умови (9) знайдемо значення $\bar{c}_0 \in \mathbf{H}$, при якому рівняння (8) буде мати розв'язок. Після перетворень (9) отримаємо операторне рівняння

$$S\bar{c}_0 = b, \tag{11}$$

де

$$S = P_{N(D^*)}W, \quad b = -P_{N(D^*)}\bar{f}.$$

Нехай оператор $S\colon \mathbf{H} \to \mathbf{H}$ нормально розв'язний. Тоді існують обмежені ортопроєктори $P_{N(S)}\colon \mathbf{H} \to N(S)$ і $P_{N(S^*)}\colon \mathbf{H} \to N(S^*)$ та обмежений псевдообернений оператор $S^+\colon \mathbf{H} \to \mathbf{H}$ до оператора S. Операторне рівняння (11) розв'язне тоді й лише тоді, коли виконується умова [13]

$$P_{N(S^*)}b = P_{N(S^*)}P_{N(D^*)}\bar{f} = 0, \tag{12}$$

при виконанні якої воно має сім'ю розв'язків

$$\bar{c}_0 = P_{N(S)}\tilde{c} + S^+b, \tag{13}$$

де $\tilde{c}$ — довільний елемент гільбертового простору $\mathbf{H}$.

Підставивши знайдене $\bar{c}_0$ у (10), отримаємо розв'язок рівняння (8):

$$\bar{y} = P_{N(D)}\tilde{y} + D^+\big\{\bar{f} + W[P_{N(S)}\tilde{c} + S^+b]\big\} =$$
$$= P_{N(D)}\tilde{y} + D^+WP_{N(S)}\tilde{c} + D^+\bar{f} - D^+WS^+P_{N(D^*)}\bar{f}.$$

Позначивши $\overline{D} = D^+ - D^+WS^+P_{N(D^*)}$, остаточно матимемо

$$\bar{y} = P_{N(D)}\tilde{y} + D^+WP_{N(S)}\tilde{c} + \overline{D}\bar{f} =$$
$$= \big[P_{N(D)}, \;\; D^+WP_{N(S)}\big]\begin{bmatrix}\tilde{y}\\ \tilde{c}\end{bmatrix} + \overline{D}\bar{f}.$$

Таким чином, справедливою є така теорема.

Теорема 1. *Нехай оператори $D\colon \mathbf{H} \to \mathbf{H}$ і $S\colon \mathbf{H} \to \mathbf{H}$ нормально розв'язні. Тоді однорідна система* (8) *має сім'ю розв'язків*

$$\bar{y} = \big[P_{N(D)}, \;\; D^+WP_{N(S)}\big]\begin{bmatrix}\tilde{y}\\ \tilde{c}\end{bmatrix},$$

де $\tilde{y} \in \mathbf{H}$, $\tilde{c} \in \mathbf{H}$ — довільні сталі.

Неоднорідна система (8) *є розв'язною для тих і лише тих $\bar{f}$, які задовольняють умову* (12), *і має сім'ю розв'язків*

$$\bar{y} = \big[P_{N(D)}, \;\; D^+WP_{N(S)}\big]\begin{bmatrix}\tilde{y}\\ \tilde{c}\end{bmatrix} + \overline{D}\bar{f}.$$

Таким чином за теоремою Ріса – Фішера існує такий елемент $y(t) \in \mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{H})$, що координати вектора $\bar{y}$ є його коефіцієнтами Фур'є і має місце зображення

$$y(t) = \Phi(t)\bar{y} = \left[\Phi(t)P_{N(D)}, \;\; \Phi(t)D^{+}WP_{N(S)}\right]\begin{bmatrix}\tilde{y}\\ \tilde{c}\end{bmatrix} + \Phi(t)\overline{D}\bar{f}. \tag{14}$$

Використовуючи методику з [12, с. 266], можна показати, що множина елементів $y(t)$, які визначаються співвідношенням (14), є шуканою сім'єю розв'язків інтегрального рівняння (4).

Враховуючи (13), заміну (2) і той факт, що $c_0 = \Phi(t)\bar{c}_0$, отримуємо загальний розв'язок інтегро-диференціального рівняння (1):

$$z(t) = \int\limits_a^t y(s)ds + \Phi(t)\bar{c}_0 =$$

$$= \left[\widetilde{\Phi}(t)P_{N(D)}, \;\; \widetilde{\Phi}(t)D^{+}WP_{N(S)}\right]\begin{bmatrix}\tilde{y}\\ \tilde{c}\end{bmatrix} + \widetilde{\Phi}(t)\overline{D}\bar{f} + \Phi(t)P_{N(S)}\tilde{c} - \Phi(t)S^{+}P_{N(D^*)}\bar{f} =$$

$$= \left[\widetilde{\Phi}(t)P_{N(D)}, \;\; \left(\widetilde{\Phi}(t)D^{+}WP_{N(S)} + \Phi(t)P_{N(S)}\right)\right]\begin{bmatrix}\tilde{y}\\ \tilde{c}\end{bmatrix} + F(t),$$

де

$$\widetilde{\Phi}(t) = \int\limits_a^t \Phi(s)ds, \quad F(t) = \left[\widetilde{\Phi}(t)\overline{D} - \Phi(t)S^{+}P_{N(D^*)}\right]\bar{f}.$$

Таким чином, для інтегро-диференціального рівняння (1) справедливою є така теорема.

Теорема 2. *Нехай оператори* $D\colon \mathbf{H} \to \mathbf{H}$ *і* $S\colon \mathbf{H} \to \mathbf{H}$ *нормально розв'язні. Тоді відповідне* (1) *однорідне інтегро-диференціальне рівняння має сім'ю розв'язків*

$$z(t) = \left[\widetilde{\Phi}(t)P_{N(D)}, \;\; \left(\widetilde{\Phi}(t)D^{+}WP_{N(S)} + \Phi(t)P_{N(S)}\right)\right]\begin{bmatrix}\tilde{y}\\ \tilde{c}\end{bmatrix}.$$

Неоднорідне інтегро-диференціальне рівняння (1) *розв'язне для тих і лише тих* $f(t) \in \mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{H})$, *які задовольняють умову*

$$P_{N(S^*)}P_{N(D^*)}\int\limits_a^b \Phi^*(t)f(t)dt = 0, \tag{15}$$

і при цьому має сім'ю розв'язків

$$z(t) = \left[\widetilde{\Phi}(t)P_{N(D)}, \;\; \left(\widetilde{\Phi}(t)D^{+}WP_{N(S)} + \Phi(t)P_{N(S)}\right)\right]\begin{bmatrix}\tilde{y}\\ \tilde{c}\end{bmatrix} + F(t), \tag{16}$$

де $\tilde{y} \in \mathbf{H}$, $\tilde{c} \in \mathbf{H}$ — *довільні сталі,*

$$F(t) = \left[\widetilde{\Phi}(t)\overline{D} - \Phi(t)S^{+}P_{N(D^*)}\right]\int\limits_a^b \Phi^*(t)f(t)dt.$$

***Зауваження* 1.** Якщо оператор D оборотний, то умова (15) буде завжди виконуватись і інтегро-диференціальне рівняння буде мати сім'ю розв'язків

$$z(t) = \left[\widetilde{\Phi}(t)D^{-1}W + \Phi(t)\right]\tilde{c} + \widetilde{\Phi}(t)D^{-1}\int\limits_a^b \Phi^*(t)f(t)dt. \tag{17}$$

Справді у цьому випадку ортопроєктори $P_{N(D)} = 0$, $P_{N(D^*)} = 0$ і, як наслідок, оператор $S = P_{N(D^*)}W = 0$. Тоді $P_{N(S)} = I_{\mathbf{H}}$, $P_{N(S^*)} = I_{\mathbf{H}}$ і з (16) будемо мати (17).

***Зауваження* 2.** Якщо оператор S оборотний, то ортопроєктори $P_{N(S)} = 0$ і $P_{N(S^*)} = 0$. У цьому випадку умова (15) буде завжди виконуватись, інтегро-диференціальне рівняння буде завжди розв'язним і матиме сім'ю розв'язків

$$z(t) = \widetilde{\Phi}(t)P_{N(D)}\tilde{y} + F(t),$$

де $\tilde{y} \in \mathbf{H}$ — довільна стала,

$$F(t) = \left[\widetilde{\Phi}(t)\overline{D} - \Phi(t)S^{-1}P_{N(D^*)}\right]\int\limits_a^b \Phi^*(t)f(t)dt,$$

$$\overline{D} = D^+ - D^+WS^{-1}P_{N(D^*)}.$$

Інтегро-диференціальні рівняння у скінченновимірних гільбертових просторах. При розгляді інтегро-диференціальних рівнянь у скінченновимірних гільбертових просторах запропоновану методику дослідження можна уточнити та конкретизувати.

Розглянемо рівняння

$$\dot{z}(t) - \int\limits_a^b [K_1(t,s)z(s) + K_2(t,s)\dot{z}(s)]ds = f(t), \tag{18}$$

де ядра $K_1(t,s)$ і $K_2(t,s)$ — сумовні з квадратом $(n \times n)$-вимірні матриці, $f(t)$ — $(n \times 1)$-вимірний вектор-стовпець, елементи яких належать простору $\mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{H})$. Розв'язок будемо шукати у класі функцій $z(t)$ таких, що $z(t) \in \mathbf{D}_2(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$, $\dot{z}(t) \in \mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$.

Виконавши заміну $z(t) = \int_a^t y(s)ds + c_0$, $c_0 \in \mathbf{R}^n$, після перетворень з (18) отримаємо інтегральне рівняння

$$y(t) - \int\limits_a^b K(t,s)y(s)ds = g(t), \tag{19}$$

де

$$K(t,s) = \int\limits_s^b K_1(t,\tau)d\tau + K_2(t,s), \quad g(t) = f(t) + \int\limits_a^b K_1(t,s)ds\, c_0.$$

Нехай, як і раніше, $\{\varphi_i(t)\}_{i=1}^{\infty}$ — повний ортонормований базис простору $\mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$. Складемо з базисних векторів $\varphi_i(t) = \mathrm{col}(\varphi_i^{(1)}(t), \varphi_i^{(2)}(t), \ldots, \varphi_i^{(n)}(t))$, $i = \overline{1, \infty}$, $(n \times \infty)$-вимірну матрицю

$$\Phi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_i(t), \ldots).$$

Як і раніше, введемо до розгляду величини

$$\bar{y} = \int_a^b \Phi^*(t)y(t)dt, \quad \bar{f} = \int_a^b \Phi^*(t)f(t)dt \quad \bar{c}_0 = \int_a^b \Phi^*(t)c_0dt. \tag{20}$$

Далі утворимо коефіцієнти Фур'є ядер $K(t,s)$ і $K_1(t,s)$ як функцій змінної s, а потім як функцій змінної t:

$$K = \int_a^b \int_a^b \Phi^*(t)K(t,s)\Phi(s)dtds, \quad W = \int_a^b \int_a^b \Phi^*(t)K_1(t,s)\Phi(s)dtds. \tag{21}$$

Застосувавши вирази (20), (21) до інтегрального рівняння (18), отримаємо зліченну систему алгебраїчних рівнянь

$$\bar{y} - K\bar{y} = \bar{f} + W\bar{c}_0,$$

або

$$D\bar{y} = \bar{f} + W\bar{c}_0, \tag{22}$$

де оператор $D = \{d_{ij}\}_{i,j=1}^{\infty} = I - K$ — $(\infty \times \infty)$-зліченновимірна матриця.

У цьому випадку оператор $K : \mathbf{l}_2 \to \mathbf{l}_2$ (21) є компактним оператором. Тоді за відомою теоремою С. М. Нікольського [14] оператор $D = I_{\mathbf{l}_2} - K$ буде фредгольмовим.

Нехай $\mathrm{dimker} D = \mathrm{dimker} D^* = r$. Позначимо через $P_{N_r(D)}$ $(\infty \times r)$-вимірну матрицю, яку складено з r лінійно незалежних стовпців $(\infty \times \infty)$-вимірної матриці-ортопроєктора $P_{N(D)}$, а через $P_{N_r(D^*)}$ $(r \times \infty)$-вимірну матрицю, яку складено з r лінійно незалежних рядків $(\infty \times \infty)$-вимірної матриці-ортопроєктора $P_{N(D^*)}$.

Тоді рівняння (22) має розв'язок для тих і лише тих правих частин, які задовольняють r лінійно незалежних умов

$$P_{N_r(D^*)}\{\bar{f} + W\bar{c}_0\} = 0, \tag{23}$$

при виконанні яких воно має r-параметричну сім'ю лінійно незалежних розв'язків

$$\bar{y} = P_{N_r(D)}\tilde{y}_r + D^+\{f + W\bar{c}_0\}, \tag{24}$$

де $\tilde{y}_r$ — довільний елемент евклідового простору $\mathbf{R}^r$, D^+ — псевдообернена за Муром–Пенроузом матриця до матриці D [3, 4].

Нехай $S = P_{N_r(D^*)}W$ — $(r \times \infty)$-вимірна матриця, $b = -P_{N_r(D^*)}\bar{f}$ — r-вимірний вектор-стовпець. Тоді з умови (23) отримаємо алгебраїчне рівняння

$$S\bar{c}_0 = b \tag{25}$$

для знаходження значення $\bar{c}_0 \in \mathbf{l}_2$, при якому рівняння (18) буде розв'язним.

Нехай $\dim\ker S = d \le r$. Це означає, що оператор S є d-нормальним. Позначимо через $P_{N(S)}$ $(\infty \times \infty)$-вимірну матрицю-ортопроєктор, а через $P_{N_d(S^*)}$ $(d \times \infty)$-вимірну матрицю, яку складено з d лінійно незалежних рядків $(r \times r)$-вимірної матриці-ортопроєктора $P_{N(S^*)}$, S^+ — псевдообернений оператор до оператора S.

Рівняння (25) розв'язне тоді й лише тоді, коли виконується умова [13]

$$P_{N_d(S^*)} b = P_{N_d(S^*)} P_{N_r(D^*)} \bar{f} = 0, \tag{26}$$

при виконанні якої рівняння (11) має сім'ю розв'язків

$$\bar{c}_0 = P_{N(S)} \tilde{c} + S^+ b,$$

де $\tilde{c} \in \mathbf{l}_2$ — довільний елемент.

Умова (26) складається з d лінійно незалежних умов, оскільки матриці $P_{N_d(S^*)}$, $P_{N_r(D^*)}$ мають повні ранги: $\mathrm{rank} P_{N_d(S^*)} = d$, $\mathrm{rank} P_{N_r(D^*)} = r$, $d \le r$, і з нерівності Сільвестра [15, с. 31] маємо

$$\mathrm{rank} P_{N_d(S^*)} + \mathrm{rank} P_{N_r(D^*)} - r \le \mathrm{rank}\big(P_{N_d(S^*)} P_{N_r(D^*)}\big) \le$$
$$\le \min\big(\mathrm{rank} P_{N_d(S^*)}, \mathrm{rank} P_{N_r(D^*)}\big),$$

або

$$d + r - r \le \mathrm{rank}\big(P_{N_d(S^*)} P_{N_r(D^*)}\big) \le d.$$

Звідси випливає, що $\mathrm{rank}\big(P_{N_d(S^*)} P_{N_r(D^*)}\big) = d$.

Підставивши знайдене $\bar{c}_0$ у (24), отримаємо загальний розв'язок рівняння (22):

$$\bar{y} = P_{N_r(D)} \tilde{y}_r + D^+ \big\{ \bar{f} + W [P_{N(S)} \tilde{c} + S^+ b] \big\} =$$
$$= P_{N_r(D)} \tilde{y} + D^+ W P_{N(S)} \tilde{c} + D^+ \bar{f} - D^+ W S^+ P_{N_r(D^*)} \bar{f}.$$

Позначивши $\overline{D} = D^+ - D^+ W S^+ P_{N_r(D^*)}$, остаточно матимемо

$$\bar{y} = P_{N_r(D)} \tilde{y}_r + D^+ W P_{N(S)} \tilde{c} + \overline{D} \bar{f} =$$
$$= \big[P_{N_r(D)}, \;\; D^+ W P_{N(S)} \big] \begin{bmatrix} \tilde{y}_r \\ \tilde{c} \end{bmatrix} + \overline{D} \bar{f}.$$

Справедливою є така теорема.

Теорема 3. *Нехай* $\dim\ker D = r$, $\dim\ker S = d \le r$. *Тоді однорідна система* (8) *має сім'ю розв'язків* $\bar{y} \in \mathbf{l}_2$,

$$\bar{y} = \big[P_{N_r(D)}, \;\; D^+ W P_{N(S)} \big] \begin{bmatrix} \tilde{y}_r \\ \tilde{c} \end{bmatrix},$$

де $\tilde{y}_r \in \mathbf{R}^r$, $\tilde{c} \in \mathbf{l}_2$ *— довільні сталі.*

Неоднорідна система (8) *є розв'язною для тих і лише тих* $\bar{f}$, *які задовольняють* d *лінійно незалежних умов*

$$P_{N_d(S^*)} P_{N_r(D^*)} \bar{f} = 0,$$

і при цьому має сім'ю розв'язків

$$\bar{y} = \begin{bmatrix} P_{N_r(D)}, & D^+ W P_{N(S)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{y}_r \\ \tilde{c} \end{bmatrix} + \overline{D} \bar{f}.$$

Отже за теоремою Ріса – Фішера існує такий елемент $y(t) \in \mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$, що координати вектора $\bar{y}$ є його коефіцієнтами Фур'є і має місце зображення

$$y(t) = \Phi(t)\bar{y} = \Phi(t) \begin{bmatrix} P_{N_r(D)}, & D^+ W P_{N(S)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{y}_r \\ \tilde{c} \end{bmatrix} + \Phi(t)\overline{D}\bar{f}. \tag{27}$$

Аналогічно [10, с. 266] можна показати, що множина елементів $y(t)$ (27) є шуканою сім'єю розв'язків інтегрального рівняння (19).

Враховуючи заміну $z(t) = \int_a^t y(s)ds + c_0$, де $c_0 = \Phi(t)\bar{c}_0$, отримуємо загальний розв'язок інтегро-диференціального рівняння (18):

$$z(t) = \int\limits_a^t y(s)ds + \Phi(t)\bar{c}_0 =$$

$$= \widetilde{\Phi}(t) \begin{bmatrix} P_{N_r(D)}, & D^+ W P_{N(S)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{y}_r \\ \tilde{c} \end{bmatrix} + \widetilde{\Phi}(t)\overline{D}\bar{f} + \Phi(t) P_{N(S)} \tilde{c} - \Phi(t) S^+ P_{N_r(D^*)} \bar{f} =$$

$$= \left[\widetilde{\Phi}(t) P_{N_r(D)}, \;\; \left(\widetilde{\Phi}(t) D^+ W P_{N(S)} + \Phi(t) P_{N(S)} \right) \right] \begin{bmatrix} \tilde{y}_r \\ \tilde{c} \end{bmatrix} + F(t),$$

де

$$\widetilde{\Phi}(t) = \int\limits_a^t \Phi(s)ds, \quad F(t) = \left[\widetilde{\Phi}(t)\overline{D} - \Phi(t) S^+ P_{N_r(D^*)} \right] \bar{f}.$$

Таким чином, для інтегро-диференціального рівняння (18) справедливою є така теорема.

Теорема 4. *Нехай* $\dim\ker D = r$, $\dim\ker S = d$. *Тоді інтегро-диференціальне рівняння* (18) *має розв'язки для тих і лише тих* $f(t) \in \mathbf{R}^n$, *які задовольняють* d *лінійно незалежних умов*

$$P_{N_d(S^*)} P_{N_r(D^*)} \int\limits_a^b \Phi^*(t) f(t) dt = 0,$$

при виконанні яких воно має сім'ю розв'язків

$$z(t) = \left[\widetilde{\Phi}(t) P_{N_r(D)}, \;\; \left(\widetilde{\Phi}(t) D^+ W P_{N(S)} + \Phi(t) P_{N(S)} \right) \right] \begin{bmatrix} \tilde{y}_r \\ \tilde{c} \end{bmatrix} + F(t),$$

де $\tilde{y}_r \in \mathbf{R}^r$, $\tilde{c} \in \mathbf{l}_2$ *— довільні сталі,*

$$F(t) = \left[\widetilde{\Phi}(t)\overline{D} - \Phi(t) S^+ P_{N_r(D^*)} \right] \int\limits_a^b \Phi^*(t) f(t) dt.$$

***Зауваження* 3.** Якщо $\operatorname{rank} S = r$, то $\operatorname{dimker} S^* = 0$ і ортопроєктор $P_{N(S^*)} = 0$. У цьому випадку умова (26) буде завжди виконуватись, інтегро-диференціальне рівняння буде завжди розв'язним і матиме сім'ю розв'язків

$$z(t) = \left[\widetilde{\Phi}(t)P_{N_r(D)}, \quad \left(\widetilde{\Phi}(t)D^+WP_{N(S)} + \Phi(t)P_{N(S)}\right)\right]\begin{bmatrix}\tilde{y}_r \\ \tilde{c}\end{bmatrix} + F(t),$$

де $\tilde{y}_r \in \mathbf{R}^r$, $\tilde{c} \in \mathbf{l}_2$ — довільні сталі,

$$F(t) = \left[\widetilde{\Phi}(t)\overline{D} - \Phi(t)S_r^+P_{N_r(D^*)}\right]\int\limits_a^b \Phi^*(t)f(t)dt,$$

$\overline{D} = D^+ - D^+WS_r^+P_{N_r(D^*)}$, S_r^+ — правий псевдообернений оператор до оператора S [4, с. 103].

Література

1. A. A. Boichuk, V. F. Zhuravlev, *Solvability criterion of integro-differential equations with degenerate kernel in Banach spaces*, Nonlinear Dyn. and Syst. Theory, **18**, № 4, 331 – 341 (2018).
2. A. M. Samoilenko, A. A. Boichuk, V. F. Zhuravlev, *Linear boundary value problems for normally solvable operator equations in a Banach space*, Different. Equat., **50**, № 3, 1 – 11 (2014).
3. A. A. Boichuk, A. M. Samoilenko, *Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems*, 2-nd ed. Inverse and Ill-Posed Probl. Ser., **59** (2016).
4. А. А. Бойчук, В. Ф. Журавлев, А. М. Самойленко, *Нормально разрешимые краевые задачи*, Наук. думка, Киев, (2019).
5. Ю. К. Ландо, *Об индексе и нормальной разрешимости интегро-дифференциальных операторов*, Диференц. рівняння, **4**, № 6, 1112 – 1126 (1968).
6. А. М. Самойленко, О. А. Бойчук, С. А. Кривошея, *Крайові задачі для систем лінійних інтегро-диференціальних рівнянь з виродженим ядром*, Укр. мат. журн., **48**, № 11, 1576 – 1579 (1996).
7. О. А. Бойчук, І. А. Головацька, *Крайові задачі для систем інтегро-диференціальних рівнянь*, Нелінійні коливання, **16**, № 4, 460 – 474 (2013).
8. V. P. Zhuravl'ov, *Generalized inversion of Fredholm integral operators with degenerate kernels in Banach spaces*, J. Math. Sci., **212**, № 3, 275 – 289 (2016).
9. A. A. Boichuk, V. F. Zhuravlev, *Solvability criterion for linear boundary-value problems for integrodifferential Fredholm equations with degenerate kernels in Banach spaces*, Ukrainian Math. J., **72**, № 11, 1695 – 1714 (2021).
10. Д. Гильберт, *Избранные труды,* т. 2, Факториал, Москва (1998).
11. Б. З. Вулих, *Введение в функциональный анализ*, Наука, Москва (1967).
12. О. А. Бойчук, Н. О. Козлова, В. А. Ферук, *Слабкозбурені інтегральні рівняння*, Нелінійні коливання, **19**, № 2, 151 – 160 (2016).
13. A. A. Boichuk, V. F. Zhuravlev, A. A. Pokutnyi, *Conditions of solvability and representation of the solutions of equations with operator matrices*, Ukrainian Math. J., **65**, № 2, 179 – 192 (2013).
14. В. А. Треногин, *Функциональный анализ*, Наука, Москва (1980).
15. В. В. Воеводин, Ю. А. Кузнецов, *Матрицы и вычисления*, Наука, Москва (1984).

Одержано 28.11.22