О неприводимых представлениях p-группы над $Z_p(\varepsilon)$

Л. А. Назарова, А. В. Ройтер

Для того чтобы описать все представления конечной группы над полем нулевой характеристики, достаточно найти все ее неприводимые представления. В случае же целочисленных представлений описание неприводимых представлений не приводит к описанию всех представлений. Более того, как известно, число неприводимых представлений всегда конечно в то время, как число неразложимых представлений, как правило, бесконечно. Это позволяет надеяться на возможность изучения неприводимых представлений для более обширных классов групп.

Всякое целочисленно неприводимое представление неприводимо и рационально. Поэтому возникает вопрос, какие целочисленно неприводимые представления рационально эквивалентны данному неприводимому представлению. Этот вопрос достаточно труден даже для простейших групп. Так например, число неприводимых целочисленных представлений циклической группы простого порядка, рационально эквивалентных неприводимому представлению степени $p - 1$, равно числу классов идеалов соответствующего кругового поля [1].

Изучение неприводимых представлений сильно упрощается в локальном случае. Так, из теоремы Штейница [2] непосредственно следует, что для коммутативной группы всякому неприводимому представлению над полем p-адических чисел соответствует только одно целочисленное (над кольцом целых p-адических чисел) неприводимое представление. Это обстоятельство перестает иметь место для некоммутативных групп

В настоящей статье рассматриваются неприводимые представления p-группы над кольцом целых p-адических чисел с присоединенным корнем из единицы достаточно высокой степени, чтобы неприводимые представления данной группы над соответствующим полем были абсолютно неприводимы. В этом случае будет показано, что число целочисленных (над $Z_p(\varepsilon)$) неприводимых представлений, соответствующих одному неприводимому представлению над полем, не меньше степени этого представления, и что число это (в случае, когда группа некоммутативная, а представление точное) делится на p.

Пусть $Z(Z_p)$ — кольцо целых (целых p-адических) чисел, $R(R_p)$ — поле рациональных (p-адических) чисел, ε — корень степени p^t из единицы, $R(\varepsilon)(R_p(\varepsilon))$ — поле рациональных (p-адических) чисел с присоединенным ε, $Z(\varepsilon)(Z_p(\varepsilon))$ — кольцо целых величин поля $R(\varepsilon)(R_p(\varepsilon))$, π — простой элемент $Z_p(\varepsilon)$. Пусть G — p-группа, $Z(\varepsilon)G(Z_p(\varepsilon)G)$ — групповое кольцо G над $Z(\varepsilon)(Z_p(\varepsilon))$, $\{T_g\}$ — точное абсолютно неприводимое представление G над $R_p(\varepsilon)$, A_i $(i=0, 1, \ldots)$ — модули неприводимых представлений над $Z_p(\varepsilon)$, эквивалентных над $R_p(\varepsilon)$ представлению $\{T_g\}$, a — число таких неизоморфных модулей. P — степень представления $\{T_g\}$. Ясно, что любой модуль A_i может быть вложен в модуль представления $\{T_g\}$.

Лемма 1. *Подмодули модуля A_i, изоморфные A_i, имеют вид $\pi^n A$, где n — целое неотрицательное число.*

Действительно, если подмодуль $B \subset A$ изоморфен A, то изоморфизм осуществляется некоторой матрицей C с коэффициентами из $Z_p(\varepsilon)$. По лемме Шура эта матрица скалярная.

Предложение 1. $a \geq P$ *.

Длина композиционного ряда фактор-модуля $A/\pi A$ равна, очевидно, P. Соответственно этому композиционному ряду мы можем провести ряд подмодулей $A_0 \supset A_1 \supset \ldots \supset A_p = \pi A_0$. В этом ряду, согласно лемме 1, никакие два модуля A_i, A_j при $i \neq j$, $i > 0$, $j > 0$ неизоморфны.

Предложение 2. *Следующие условия равносильны:*

а) $a = P$;

б) *подмодули любого модуля A_i образуют упорядоченное множество;*

в) *всякий модуль A_i имеет в точности один максимальный подмодуль;*

г) *всякий модуль A_i — циклический;*

д) *для любых двух A_i и A_j можно A_j вложить в A_i так, чтобы $\pi A_i \subseteq A_j \subseteq A_i$;*

е) *если у некоторого $Z_p(\varepsilon)G$ модуля V найдутся два подмодуля A_i и A_j такие, что $V/A_i \simeq V/A_j \simeq A_k$, то $A_i \simeq A_j$.*

Из доказательства предложения 1 следует существование ряда модулей

$$A_0 \supset A_1 \supset \ldots \supset A_P = \pi A_0 \supset \pi A_1 = A_{P+1} \supset \ldots, \tag{1}$$

каждый из которых максимален в предыдущем, и такого, что $A_i \simeq A_j$ тогда и только тогда, когда $i \equiv j \pmod{P}$. Если $a = P$, то всякий подмодуль A_0 изоморфен одному из модулей этого ряда, а значит, по лемме 1, принадлежит этому ряду. Следовательно, из а) получаем б). Если же выполнено условие б), то всякий подмодуль A_0 принадлежит нашему ряду, а значит $a = P$.

Равносильность условий б) и в) очевидна.

Поскольку кольцо $Z_p(\varepsilon)G$ имеет один максимальный идеал, то ясно, что всякий циклический модуль (т. е. фактор-модуль $Z_p(\varepsilon)G$) имеет один

---

* Соответствующий результат верен и без предположения об абсолютной неприводимости $\{T_g\}$, только роль степени представления $\{T_g\}$ играет размерность простой алгебры, соответствующей $\{T_g\}$, рассматриваемой как алгебра матриц над некоторым телом.

максимальный подмодуль. С другой стороны, если модуль имеет один максимальный подмодуль, то этот модуль циклический, так как в качестве образующего элемента можно выбрать любой элемент, не принадлежащий максимальному подмодулю. Мы доказали равносильность условий в) и г).

Если имеет место в), то все подмодули произвольного модуля A_0 образуют ряд (1), а значит, выполняется условие д).

Покажем, что из д) следует в). Действительно, предположим, что при выполнении условия д) модуль A_0 содержит максимальные подмодули A_1 и A_1'. Согласно условию д) A_1' можно вложить между A_1 и πA_1, т. е., по лемме 1, $A_1 \supset \pi^s A_1' \supset \pi A_1$, что невозможно.

Пусть выполнено условие б). Покажем, что выполняется условие е). Действительно, пусть $V/A_i \simeq V/A_j \simeq A_k$. Рассмотрим $A_i \cap A_j$. Если A_i не совпадает с A_j, то $A_i \cap A_j = 0$. В этом случае рассмотрим подмодуль $A_i \dotplus A_j$ модуля V. Очевидно $V/A_i \dotplus A_j \simeq A_k/A_i \simeq A_k/A_j$, значит, модули A_i и A_j имеют в A_k одинаковый индекс, что противоречит б).

Для того чтобы доказать, что из е) следует в), сформулируем следующую лемму.

Лемма 2*. *Пусть A, B, C, D, U — модули над произвольным кольцом Λ, причем имеют место точные последовательности*

$$0 \to B \to A \xrightarrow{\varphi} U \to 0,$$

$$0 \to D \to C \xrightarrow{\psi} U \to 0.$$

Тогда существует модуль V, для которого можно построить точные последовательности:

$$0 \to D \to V \to A \to 0,$$

$$0 \to B \to V \to C \to 0.$$

Рассмотрим пары (a, c), $a \in A$, $c \in C$ такие, что $a\varphi = c\psi$. Эти пары образуют искомый модуль. В самом деле, построим гомоморфизм $(a, c) \to (a, 0)$. Поскольку ψ — эпиморфизм, то и наш гомоморфизм будет эпиморфизмом. Ядром его будет, очевидно, D. С другой стороны, построив эпиморфизм $(a, c) \to (0, c)$ с ядром B, получим требуемые точные последовательности.

Пусть теперь выполнено условие е), но не выполнено условие в). Тогда найдется модуль A_0 с двумя максимальными A_1 и A_1' $A_0/A_1 \simeq A_0/A_1' \simeq (p)$, а значит, по лемме 2, найдется модуль V и точные последовательности

$$0 \to A_1 \to V \to A_0 \to 0,$$

$$0 \to A_1' \to V \to A_0 \to 0.$$

Отсюда, по условию е), $A_1 \simeq A_1'$. Но тогда, погружая A_1 и A_1 в некоторый изоморфный им модуль, содержащий A_0, приходим в противоречие с леммой 1.

Предложение 2 доказано.

Лемма 3. *Число максимальных подмодулей модуля A_i $(i = 0, 1, \ldots)$ сравнимо с единицей по* $\bmod p$.

Пусть A_l — максимальный подмодуль модуля A_i; $A_i/A_l = (p)$ — циклическая группа порядка p с тривиально действующими операторами; $\mathrm{Hom}(A_i, (p))$ — элементарная абелева группа типа $(p, \ldots, p)$. Число ненулевых элементов этой группы $p^l - 1$. Поскольку всякий максимальный подмодуль модуля A_i является ядром в точности $p - 1$ ненулевого гомоморфизма из $\mathrm{Hom}(A_i, (p))$,

* Лемма 2, которая может быть доказана для объектов абелевой категории, несмотря на свою простоту может представлять некоторый самостоятельный интерес. Так, например, из нее сразу следует теорема Шануэля [3].

то число максимальных подмодулей модуля A_l равно $\frac{p^l - 1}{p - 1} = p^{l-1} + \ldots$ $\ldots + p + 1 \equiv 1 \pmod p$.

Лемма доказана

Пусть $\widetilde{A}$ — модуль представления $\{T_g\}$. Рассмотрим $Z_p(\varepsilon)\,G$-подмодули модуля $\widetilde{A}$, изоморфные одному из модулей A_i. Представления, соответствующие двум любым таким модулям A_i и A_j эквивалентны над $R_p(\varepsilon)$, а значит, существует матрица C_{ij} с коэффициентами из $R_p(\varepsilon)$, переводящая A_i в A_j. Такая матрица определена неоднозначно, но ее определитель определен однозначно с точностью до единиц кольца $Z_p(\varepsilon)$. Зафиксируем некоторый A_0 и будем говорить, что A_i лежит на m-м этаже $(-\infty < m < \infty)$, если $|C_{0i}| = \pi^m\tau$, где τ — единица $Z_p(\varepsilon)$.

Покажем, прежде всего, что если мы возьмем подряд P этажей (например, этажи с номерами $1, 2, \ldots, P$), то среди модулей, лежащих на этих этажах, будет встречаться и при том в точности один раз каждый модуль представления, эквивалентного над $R_p(\varepsilon)$ представления $\{T_g\}$.

Действительно, умножая модуль, лежащий на любом этаже на π в нужной степени, мы можем получить изоморфный ему модуль, лежащий на выбранных нами P этажах. Пусть теперь два модуля A_i и A_j, лежащие на наших P этажах, изоморфны. Тогда мы можем погрузить оба эти модуля в качестве подмодулей в некоторый изоморфный им модуль A_k. Из леммы 1 следует, что A_i и A_j должны получаться друг из друга умножением на π^n. Но поскольку умножение на π^n сдвигает модуль на nP этажей, а между нашими модулями находятся меньше, чем P этажей, то $n = 0$ и модули A_i и A_j должны совпадать.

Поскольку число неизоморфных модулей представлений, эквивалентных над полем конечно [4], то из приведенного рассуждения следует, что число модулей, лежащих на каждом этаже, конечно. Обозначим через d_i число модулей, лежащих на i-м этаже. Покажем что $d_i \equiv d_j \pmod p$.

Действительно, рассмотрим два соседних этажа i-й и $i+1$-й. Ясно, что для каждого модуля, лежащего на i-м этаже, его максимальные подмодули лежат на $i+1$-м этаже. Значит, по лемме 3, число модулей $i+1$-го этажа, содержащихся в данном модуле i-го этажа, сравнимо с единицей по модулю p. Из соображений двойственности следует, что число модулей i-го этажа, содержащих данный модуль $i+1$-го этажа, также сравнимо с единицей по модулю p. Если мы теперь выпишем для каждого модуля i-го этажа все его максимальные подмодули, то получим все модули $i+1$-го этажа, причем каждый из них будет выписан столько раз, в скольких модулях i-го этажа он содержится. Но поскольку число выписанных нами модулей будет сравнимо с числом модулей i-го этажа, а для получения модулей $i+1$-го этажа нам нужно будет вычеркнуть число модулей, кратное p, то $d_i = d_{i+1} \pmod p$, а значит, $d_i = d_j \pmod p$ при любых i, j.

Итак, число всех модулей, лежащих на первых P этажах, сравнимо с Pd_1 по модулю p, и, учитывая, что, как известно, [5] $P = p^k$, получаем

Предложение 3. *Если G — некоммутативная p-группа, то $a = 0 \pmod p$.*

Предложение 4. *Пусть M — дедекиндово кольцо, K — его поле частных; K_n — кольцо матриц размерности n над K; Λ — порядок в K_n, являющийся M-модулем размерности n. Тогда существует взаимно однозначное соответствие между модулями неприводимых представлений Λ над M и максимальными порядками K_n, содержащими Λ.*

Сопоставим всякому (правому) модулю A неприводимого представления Λ над M его (правое) кольцо множителей [6], т. е. совокупность элементов из K_n, умножение на которые не выводит из модуля A. Ясно, что мы получим порядок, содержащий Λ. Правое кольцо множителей модуля

A совпадает с правым кольцом множителей модуля $A^{(n)}$ ($A^{(n)}$ — прямая сумма n экземпляров A). $A^{(n)}$ мы можем рассматривать как идеал в K_n. Левое кольцо множителей для $A^{(n)}$ будет, как это следует из рассуждений, аналогичных доказательству леммы 1, полным матричным кольцом над M, т. е. максимальным порядком в K_n, а значит, и его правое кольцо множителей будет максимальным порядком [7].

Пусть теперь, наоборот, мы имеем некоторый максимальный порядок $\mathfrak{v}$, содержащий Λ. Тогда $\mathfrak{v}$ мы можем рассмотреть как правый Λ-модуль и из максимальности $\mathfrak{v}$ следует, что $\mathfrak{v}$ как Λ-модуль распадается в прямую сумму n экземпляров некоторого модуля A. Ясно, что A будет модулем неприводимого представления Λ над M и что правое кольцо множителей A совпадает с $\mathfrak{v}$.

П р е д л о ж е н и е 5. *Пусть G — p-группа, ε — корень из единицы степени p^n такой, что все представления G над $R(\varepsilon)$ абсолютно неприводимы. Число максимальных надпорядков, содержащих $Z(\varepsilon)G$, делится на p^r, где r — число неприводимых представлений группы G над $R(\varepsilon)$ степени больше* 1.

Прежде всего, из результатов [6], следует, что порядки в $R(\varepsilon)G$, содержащие $Z(\varepsilon)G$, находятся во взаимно однозначном соответствии с порядками в $R_p(\varepsilon)G$, содержащими $Z_p(\varepsilon)G$. Далее, $R_p(\varepsilon)G$ распадается в прямую сумму простых алгебр и всякий максимальный порядок также распадается в прямую сумму порядков в соответствующих простых алгебрах, каждый из которых является, согласно предложению 4, кольцом множителей модуля некоторого неприводимого представления. Отсюда получаем, что, если $\{T_g^1\}$, $\{T_g^2\}$, . . . — различные неприводимые представления над $R(\varepsilon)$, a_i — число модулей неприводимых $Z_p(\varepsilon)$-представлений, соответствующих $\{T_g^i\}$, то число максимальных $Z_p(\varepsilon)$ G-порядков, содержащих $Z_p(\varepsilon)G$, равно $\prod\limits_i a_i$. Поэтому из предложения 3 следует наше утверждение.

З а м е ч а н и е 1. При доказательстве предложения 3 было установлено, что $d_i \equiv d_j (\mathrm{mod}\, p)$. Можно доказать, что $d_i \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\, p)$. d_i — число модулей, лежащих на одном этаже, может быть определено так: A_i и A_j лежат на одном этаже, если $A_i = C^{-1}A_jC$, где C — унимодулярная матрица с коэффициентами из $R_p(\varepsilon)$.

З а м е ч а н и е 2. Из предложения 3 следует, что число всех неэквивалентных неприводимых представлений p-группы над $Z_p(\varepsilon)$ делится на p.

З а м е ч а н и е 3. Для обеих некоммутативных групп 8-го порядка число неприводимых $Z_p(\varepsilon)$-представлений, соответствующих одному представлению над $R_p(\varepsilon)$ степени 2, равно двум.

Для группы 27-го порядка с определяющими соотношениями $a^9 = 1$, $bab^{-1} = a^{-1}$ число неприводимых представлений над $Z_p(\varepsilon)$, соответствующих одному представлению над $R_p(\varepsilon)$ степени 3, равно трем. Таким образом, для этих групп оценка, данная в предложении 1, оказывается точной.

Однако для группы 27-го порядка с определяющими соотношениями $a^3 = c^3 = 1$; $c^2ac^2 = a^2ca^2$; $cac^{-1}a = acac^{-1}$ число неприводимых представлений над $Z_p(\varepsilon)$ (здесь $\varepsilon = \sqrt[3]{1}$), соответствующих одному $R_p(\varepsilon)$-представлению степени 3, равно шести, а именно:

$$1)\qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon^2 \end{pmatrix};$$

$$2)\qquad A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & \varepsilon - 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad C = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon^2 & 0 \\ 1 & 1+\varepsilon & 1 \end{pmatrix};$$

$$3)\qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1-\varepsilon & 0 \\ (1-\varepsilon)\varepsilon^2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad C = \begin{pmatrix} \varepsilon^2 & 0 & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 \\ 2+\varepsilon & 1-\varepsilon & 1 \end{pmatrix};$$

$$4)\quad A=\begin{pmatrix}1 & 1-\varepsilon & 0\\ (1-\varepsilon)\varepsilon^2 & -2 & 1-\varepsilon\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix};\qquad C=\begin{pmatrix}\varepsilon^2 & 0 & 0\\ \varepsilon & \varepsilon & 0\\ -\varepsilon^2 & 1 & 1\end{pmatrix};$$

$$5)\quad A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ \varepsilon^2(1-\varepsilon^2)^2 & -2 & -3-\varepsilon\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix};\qquad C=\begin{pmatrix}3+\varepsilon & 1 & 0\\ (1-\varepsilon)\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon\\ -3 & \varepsilon-1 & -1-\varepsilon\end{pmatrix};$$

$$6)\quad A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ \varepsilon^2(1-\varepsilon)^2 & -2 & \varepsilon^2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix};\qquad C=\begin{pmatrix}-3-2\varepsilon & -1 & -2(1+\varepsilon)\\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon\\ 3 & 1-\varepsilon & 3+\varepsilon\end{pmatrix}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. I. Reiner, Integral representations of cyclic group of prime order, Proc. Amer. Math., Soc., 8, 1, 1957, 146.
2. Steinitz, Rechteckige System und Moduln in algebraischen Zahlkörpern, Math. An., **71**, 1912, 328; **72**, 1912, 297.
3. R. G. Swan, Induced representations and projective modules, Ann. of Math., 2, 71, 1960, 552—578.
4. H. Zassenhaus, Neuer Bewies der Endlichkeit der Klassenzahl bei unimodularer Aquivalenz endlicher genzzahliger Substitutionsgruppen, Abh. Math. Sem. Univ. Hansis, **12**, B. 3, 4, 1938, 276—289.
5. Вандер Варден, Современная алгебра, Гостехиздат, М.—Л., 1947.
6. Д. К. Фаддеев, Введение в мультипликативную теорию модулей целочисленных представлений, Тр. МИАН им. В. А. Стеклова, Изд-во АН СССР, 1965.
7. Н. Джекобсон, Теория колец, М., 1947.

Поступила 18.II 1965 г.
Киев