Применение граничных задач теории функций к решению третьей задачи плоской теории упругости для бесконечной плоскости с треугольным и правильным многоугольным отверстиями

Г. Н. Положий
(Киев)

Третья задача плоской теории упругости для некоторых областей, ограниченных кусочно прямолинейными контурами частного вида, была решена нами ранее [1, 2]. В настоящей работе дается решение этой задачи для бесконечной плоскости с треугольным отверстием, а также при некоторых частных предположениях — для плоскости с отверстием, имеющем форму произвольного правильного многоугольника.

§ 1. Треугольное отверстие. Пусть G есть область в плоскости $z=x+iy$, внешняя треугольнику с вершинами A_1, A_2, A_3 и внешними углами при этих вершинах $\alpha_1\pi$, $\alpha_2\pi$, $\alpha_3\pi$. Пусть σ — длина границы L области G, отсчитываемая от некоторой начальной точки при положительном обходе G. Пусть r — радиус круга, вписанного в этот треугольник. Для определенности будем считать, что центр этого круга совпадает с точкой $z=0$, а сторона A_3A_1 перпендикулярна оси x.

Пусть $\zeta=\varrho e^{i\theta}=\zeta(z)$ есть функция, дающая конформное отображение области G на круг $|\zeta|<1$, далее, $a_1=e^{\frac{i\pi}{3}}$, $a_2=e^{i\pi}$, $a_3=e^{\frac{i5\pi}{3}}$ — точки границы γ круга $|\zeta|<1$, соответствующие точкам A_1, A_2, A_3.

В силу свойств конформных отображений имеем

$$z=A\int\limits_{a_3}^{\zeta}\prod_{m=}^{3}(\zeta-a_m)^{-\mu_m}\frac{d\zeta}{\zeta^2}+A_3$$

$$\left(A=(A_1-A_3)\Big|\int\limits_{a_3}^{a_1}\prod_{m=1}^{3}(\zeta-a_m)^{-\mu_m}\frac{d\zeta}{\zeta^2},\ \mu_m=1-\alpha_m\right). \tag{1,1}$$

В частности, если треугольник $A_1A_2A_3$ правильный, то

$$z=A\int\limits_{z_0}^{\zeta}(1+\zeta^3)^{\frac{2}{3}}\frac{d\zeta}{\zeta^2}+2re^{\frac{i\pi}{3}}\left(A=-a\Big|\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\left(2\cos\frac{3\theta}{2}\right)^{\frac{2}{3}}d\theta,\ a=2\sqrt{3}\,r\right).$$

Найдем плоское напряженное состояние области G, допускающее непрерывность смещений во всех конечных точках $G+L$, если нормальное смещение ν и касательное напряжение T на контуре L заданы:

$$\nu=\nu(\sigma), \quad T=T(\sigma), \tag{1,2}$$

где $\nu(\sigma)$ и $T(\sigma)$ — произвольные вещественные функции от σ такие, что $T(\sigma)$ и $\dfrac{d\nu(\sigma)}{d\sigma}$ как функции от θ удовлетворяют условию H на каждой из закрытых (то есть включающих свои концы) дуг $[a_1a_2]$, $[a_2a_3]$, $[a_3a_1]$.

Формулы для нормальных и касательных смещений ν, t и нормальных и касательных напряжений N и T, установленные нами ранее [1], имеют вид

$$2\mu\left(\frac{dt}{ds}-i\frac{d\nu}{ds}\right)=k\varphi'(\bar{z})-\bar{\varphi}'(\bar{z})+[z\bar{\varphi}''(\bar{z})+\bar{\psi}'(\bar{z})]\,e^{-i2\alpha}, \tag{1,3}$$

$$2\mu\frac{dt}{ds}+N+i\left(-2\mu\frac{d\nu}{ds}+T\right)=(k+1)\varphi'(z)\quad\left(k=\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}\right). \tag{1,4}$$

Здесь s — длина дуги любого кусочно прямолинейного контура Γ, α — угол, составленный с осью x, нормалью к Γ, остающейся справа при движении вдоль Γ в сторону возрастания s, $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ — функции Колосова-Гурса, λ и μ — постоянные Ламэ.

Функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ в предположении, что компоненты смещений есть однозначные функции от z, а компоненты напряжений остаются ограниченными при подходе к бесконечности, как известно [3], для всяких бесконечных областей имеют вид

$$\varphi(z)=-\frac{X+iY}{2\pi(k+1)}\ln z+(B+iC)\,z+\varphi_1(z), \tag{1,5}$$

$$\psi(z)=\frac{k(X-iY)}{2\pi(k+1)}\ln z+(B'+iC')\,z+\psi_1(z). \tag{1,6}$$

Здесь X и Y — проекции главного вектора внешних усилий, приложенных к L, на оси x и y, далее, $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$ — функции голоморфные в области G (включая и бесконечно удаленную точку), а B, C, B', C' — вещественные постоянные, определенные равенствами

$$B+iC=\frac{1}{4}(N_1{}^0+N_2{}^0)+\frac{i2\mu\varepsilon^0}{(k+1)},$$

$$B'+iC'=-\frac{1}{2}(N_1{}^0-N_2{}^0)\,e^{-i2\alpha^0}\left(\varepsilon^0=\frac{1}{2}\lim_{z\to\infty}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right),$$

где $N_1{}^0$ и $N_2{}^0$ — значения главных напряжений при $z=\infty$, α^0 — угол, который составляет с осью x главная ось, соответствующая $N_1{}^0$, затем ε^0 — значение вращения на бесконечности, u и v — проекции вектора смещений на оси x и y.

Имея целью решить нашу задачу при произвольно заданных значениях постоянных X, Y, B, C, B', C', будем считать, что $\varphi'(z)$ и $\psi(z)$ при подходе к угловым точкам удовлетворяют неравенствам

$$|\varphi'(z)|,\ |\psi(z)| < M|z-A_m|^{-\lambda'} \quad (M=\text{const},\ \lambda'<1,\ m=1, 2, 3). \qquad (1,7)$$

Из равенства (1,4), учитывая (1,7), получаем

$$\varphi'(z) = \varphi_0'(z) + D + \sum_{m=1}^{3} D_m t_m(z), \qquad (1,8)$$

где D, D_1, D_2, D_3 — вещественные пока неопределенные постоянные

$$\varphi_0'(z) = \frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Gamma(\sigma)\frac{e^{i\theta}+\zeta}{e^{i\theta}-\zeta}d\theta \quad \left(\Gamma(\sigma) = \frac{1}{k+1}\left[-2\mu\frac{d\nu(\sigma)}{d\sigma}+T(\sigma)\right]\right), \qquad (1,9)$$

$$t_m(z) = -\frac{i(\zeta+a_m)}{(\zeta-a_m)} \qquad (m=1, 2, 3). \qquad (1,10)$$

Обозначая через Δ_m скачок функции $\Gamma(\sigma)$ в точке A_m в силу свойств интеграла типа Коши, видим, что $\varphi_0'(z)$ и $\varphi_0'^{+}(z)$ (знак $+$ обозначает предельные значения на L изнутри) вблизи каждой точки a_m представимы в виде

$$\varphi_0'(z) = -\frac{\Delta_m}{\pi}\ln(\zeta-a_m)+\Phi(\zeta), \quad \varphi_0'^{+}(z) = -\frac{\Delta_m}{\pi}\ln(t-a_m)+\Phi^{+}(t) \qquad (1,11)$$
$$(t=e^{i\theta}),$$

где $\Phi(\zeta)$ — функция, непрерывная в точке $\zeta=a_m$, $\Phi^{+}(t)$ — функция от t, удовлетворяющая условию H на некоторых закрытых дугах, имеющих точку a_m своим правым и, соответственно, левым концами.

Сравнивая (1,5) и (1,8) и учитывая, что $\lim\limits_{z\to\infty} z\zeta = -A$, для определения постоянных D, D_1, D_2, D_3 получаем равенства $D=B$

$$C - \sum_{m=1}^{3} D_m = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Gamma(\sigma)\,d\theta,$$

$$\frac{(X+iY)}{2\pi(k+1)A} = \frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Gamma(\sigma)\,2e^{-i\theta}\,d\theta + \sum_{m=1}^{3} i2\bar{a}_m D_m. \qquad (1,12)$$

Отсюда для нахождения D_1, D_2, D_3 имеем систему уравнений

$$D_1+D_2+D_3 = C - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Gamma(\sigma)\,d\theta,$$

$$\frac{1}{2}D_1 - D_2 + \frac{1}{2}D_3 = Re\frac{Y-iX}{4\pi(k+1)A} - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Gamma(\sigma)\cos\theta\,d\theta, \qquad (1,13)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}D_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}D_3 = -\operatorname{Im}\frac{Y-iX}{4\pi(k+1)A} - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Gamma(\sigma)\sin\theta\,d\theta.$$

Определитель этой системы уравнений равен $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ и, следовательно, постоянные D_1, D_2, D_3, так же как и постоянная D, однозначно определяются контурными условиями (1,2) и заданием постоянных X, Y, B, C.

Перейдем теперь к нахождению функции $\psi_1(z)$.

Интегрируя обе части формулы (1,4) вдоль произвольного кусочно прямолинейного контура Γ, выходящего из точки $z=r$ в направлении стороны A_3A_1, получаем

$$2\mu(\nu+it)=e^{-i\alpha}\Big[k\varphi_0(z)-z\overline{\varphi_0'}(\overline{z})-\overline{\psi}(\overline{z})+(k-1)Bz+$$
$$+k\sum_{m=1}^{3}D_m w_m(z)-z\sum_{m=1}^{3}D_m\overline{t}_m(\overline{z})\Big], \tag{1,14}$$

где

$$\varphi_0(z)=\int_r^z\varphi_0'(z)\,dz,\quad w_m(z)=\int_r^z t_m(z)\,dz. \tag{1,15}$$

Из равенства (1,14), учитывая (1,6) для определения функции $\psi_1(z)$, имеем следующую граничную задачу:

$$Re[\psi_1^+(z)e^{i\alpha}]=-2\mu\nu(\sigma)+Re\Big\{e^{i\alpha}\Big[k\overline{\varphi}_0(\overline{z})-\overline{z}\varphi_0'(z)+(k-1)B\overline{z}+$$
$$+k\sum_{m=1}^{3}D_m\overline{w}_m(\overline{z})-\overline{z}\sum_{m=1}^{3}D_m t_m(z)-\frac{k(X-iY)}{2\pi(k+1)}\ln z-(B'+iC')z\Big]^+\Big\}. \tag{1,16}$$

Положив

$$\psi_1(z)=\psi_2(z)-\sum_{m=1}^{3}\overline{A}_m D_m t_m(z) \tag{1,17}$$

для определения функции $\psi_2(z)$, имеем граничную задачу

$$Re[\psi_2^+(z)e^{i\alpha}]=-2\mu\nu(\sigma)+(k-1)Br+Re[e^{i\alpha}\Omega^+(z)], \tag{1,18}$$

где

$$\Omega(z)=k\overline{\varphi}_0(\overline{z})-\overline{z}\varphi_0'(z)+k\sum_{m=1}^{3}D_m\overline{w}_m(\overline{z})-$$
$$-\sum_{m=1}^{3}(\overline{z}-\overline{A}_m)D_m t_m(z)-\frac{k(X-iY)}{2\pi(k+1)}\ln z-(B'+iC')z. \tag{1,19}$$

Из условия непрерывности смещений, то есть из условия непрерывности функции $k\varphi(z)-z\overline{\varphi'}(\overline{z})-\overline{\psi}(z)$, на границе области G заключаем, что функция $\psi_2(z)$ должна быть непрерывной в точках a_1, a_2, a_3. В силу этого мы должны рассматривать не всевозможные решения граничной задачи (1,18), а лишь те, которые почти ограничены при подходе к точкам a_1, a_2, a_3. Индекс граничной задачи (1,18), соответствующий этим решениям, как легко видеть, равен -1 и, следовательно, почти ограниченное в точках a_1, a_2, a_3 решение этой задачи существует единственно и может быть записано в квадратурах

$$\psi_2(z) = \frac{X(z)}{\pi i}\int_\gamma \frac{\{-2\mu\nu(\sigma)+(k-1)Br+Re[e^{i\alpha}\Omega^+(z)]\}e^{-i\alpha}dt}{X^+(z)\,(t-\zeta)}. \quad (1,20)$$

Здесь

$$X(z) = Ee^{\Gamma(z)}, \quad \Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\ln(te^{-i2\omega})\,dt}{t-\zeta},$$

где E — постоянная, $\omega=0,\ 1+\mu_1,\ 2+\mu_1+\mu_2,\ 3+\mu_1+\mu_2+\mu_3$ соответственно на дугах $[1a_1]$, $[a_1a_2]$, $[a_2a_3]$, $[a_31]$. Непосредственный подсчет показывает, что

$$\Gamma(z) = \ln(\zeta-1) - \ln\left(\frac{\zeta-a_2}{\zeta-a_1}\right)^{1+\mu_1}\left(\frac{\zeta-a_3}{\zeta-a_2}\right)^{2+\mu_1+\mu_2}\left(\frac{\zeta-1}{\zeta-a_3}\right)^{3+\mu_1+\mu_2+\mu_3} + \text{const.}$$

и, следовательно, при соответствующем подборе постоянной E будем иметь

$$X(z) = \prod_{m=1}^{3}(\zeta-a_m)^{1+\mu_m},$$

или $\qquad (1,21)$

$$X(z) = \prod_{m=1}^{3}(\zeta-a_m)^{-\mu'_m},$$

где $\mu'_m = -(1+\mu_m)$.

В силу известных свойств интеграла типа Коши из равенств (1,20), (1,21) и (1,11) видим, что $\psi_2(z)$ вблизи каждой точки a_m $(m=1, 2, 3)$ представима в виде

$$\psi_2(z) = \Phi_m(\zeta) - \frac{X(z)}{\pi i}\int_\gamma \frac{Re[\bar{A}_m\varphi_0'^+(z)e^{i\alpha}]e^{-i\alpha}dt}{X^+(z)\,(t-\zeta)}, \quad (1,22)$$

где $\Phi_m(\zeta)$ — функция, непрерывная в точке $\zeta=a_m$.

Вычитаемое правой части равенства (1,22) есть функция, почти ограниченная при подходе к точке $\zeta=a_m$.

С другой стороны, почти ограниченное решение граничной задачи

$$Re[F^+(z)e^{i\alpha}] = Re[\bar{A}_m\varphi_0'^+(z)e^{i\alpha}]$$

в силу того, что соответствующий индекс равен —1, единственно и, следовательно, вычитаемое правой части (1,22) есть не что иное как $\bar{A}_m\varphi'_0(z)$.

Подставляя функцию $\psi_2(z)$, определенную равенством (1,20), в (1,14), получаем

$$2\mu(u+iv) = k\varphi_0(z) - z\overline{\varphi'_0}(z) - \overline{\psi_2}(\bar{z}) + (k-1)Bz + k\sum_{m=1}^{3}D_m w_m(z) -$$

$$-\sum_{m=1}^{3}(z-A_m)D_m\bar{t}_m(\bar{z}) - \frac{k(X-iY)}{2\pi(k+1)}\ln\bar{z} - (B'-iC')\bar{z}. \quad (1,23)$$

Отсюда в силу (1,22) видим, что u и v будут функциями непрерывных в точках A_1, A_2, A_3.

Таким образом, проекции вектора смещений u и v на оси x и y найдены. При этом для N и T будет иметь место равенство

$$N+iT=\varphi_0'(z)+\overline{\varphi}_0'(\overline{z})+2B+\sum_{m=1}^{3}D_m[t_m(z)+\overline{t}_m(\overline{z})]-$$
$$-\left\{z\left[\overline{\varphi}_0''(\overline{z})+\sum_{m=1}^{3}D_m t_m'(z)\right]+\overline{\psi}_3'(\overline{z})+B'-iC'-\right. \tag{1,24}$$
$$\left.-\sum_{m=1}^{3}A_m D_m \overline{t}_m'(\overline{z})+\frac{k(X+iY)}{2\pi(k+1)\overline{z}}\right\}e^{-i2\alpha}.$$

Этим поставленная задача об определении плоского напряженного состояния по заданным на контуре нормальному смещению и касательному напряжению решена.

Рассмотрим теперь отдельно случай, когда

$$\begin{matrix} X=Y=C=B'=C'=0 \\ T(\sigma)=0 \end{matrix} \qquad \nu(\sigma)=\begin{cases}\nu_1 & \text{на} \quad A_3A_1\\ \nu_2 & \text{на} \quad A_1A_2\\ \nu_3 & \text{на} \quad A_2A_3\end{cases} \tag{1,25}$$

где ν_1, ν_2, ν_3 — заданные постоянные.

Здесь из равенств (1,19), (1,15), (1,13) и (1,12) имеем

$$\varphi_0'(z)=\varphi_0(z)=0, \quad D=B, \quad D_1=D_2=D_3=0.$$

Из (1,18) получаем

$$Re[\psi^+(z)e^{i\alpha}]=-2\mu\nu(\sigma)+(k-1)Br. \tag{1,26}$$

В соответствии с равенством (1,20) можем написать

$$\psi(z)=\frac{1}{\pi i}\prod_{m=1}^{3}(\zeta-a_m)^{1+\mu_m}\int\limits_{\gamma}\frac{[-2\mu\nu(\sigma)+(k-1)Br]e^{-i\alpha}\,dt}{\prod\limits_{m=1}^{3}(t-a_m)^{1+\mu_m}(t-\zeta)}. \tag{1,27}$$

Вопрос о вычислении интегралов типа правой части равенства (1,27), насколько нам известно, в литературе не изучался. Поэтому мы постараемся решить задачу (1,26), а тем самым и свести интеграл правой части равенства (1,27) к хорошо изученным интегралам, при помощи специального приема, основанного на некоторых геометрических соображениях.

Запишем равенство (1,26) в виде

$$Re[\psi^+(z)e^{i(\alpha-\pi)}]=2\mu\nu(\sigma)-(k-1)Br,$$

или в виде

$$Re[\psi^+(z)e^{-i\alpha'}]=2\mu\nu(\sigma)-(k-1)Br, \tag{1,28}$$

где $\alpha'=0$, $-\mu_1$, $-\mu_1-\mu_2$, $-\mu_1-\mu_2-\mu_3$ соответственно на дугах $[1a_1]$, $[a_1a_2]$, $[a_2a_3]$, $[a_31]$.

В плоскости комплексной переменной ψ через точку $\psi=0$ проведем направленные прямые I, II, III, составляющие с вещественной осью углы 0, $-\mu_1$, $-\mu_1-\mu_2$. В направлении этих лучей I, II, III отложим соответственно отрезки $2\mu\nu_1-(k-1)Br$, $2\mu\nu_2-(k-1)Br$, $2\mu\nu_3-(k-1)Br$. При этом, если среди этих величин найдутся отрицательные, то их следует откладывать от начала координат в направлении, противоположном соответствующему лучу. Обозначим через P, Q, R концевые точки отрезков, отложенных на лучах I, II, III. Через каждую из точек P, Q, R проведем прямые I′, II′, III′, ортогональные соответственно лучам I, II, III. Прямые I′, II′, III′ составят с вещественной осью углы $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}-\mu$, $\frac{\pi}{2}-\mu_1-\mu_2$ и пересекут друг друга в некоторых конечных точках A'_1, A'_2, A'_3, образуя конечный треугольник с внутренними углами $(2-\alpha_1)\pi$, $(2-\alpha_2)\pi$, $(2-\alpha_3)\pi$ (A'_1 — соответствует пересечению I′ и II′, A'_2 — пересечению II′ и III′ и A'_3 — пересечению III′ и I′). Назовем треугольник $A'_1A'_2A'_3$ по отношению к треугольнику $A_1A_2A_3$ присоединенным треугольником.

Теперь видно, что если построить функцию $\psi(z)$ как конформное отображение круга $|\zeta|<1$ на присоединенный треугольник $A'_1A'_2A'_3$, причем так, чтобы точкам a_1, a_2, a_3 соответствовали точки A'_1, A'_2, A'_3, то эта функция будет непрерывным решением задачи (1,26). В силу единственности искомого решения задачи (1,26) построенная функция $\psi(z)$ совпадает с функцией, определенной интегралом правой части равенства (1,27).

Таким образом, чтобы решить задачу о напряженном состоянии треугольного отверстия при условии (1,25), достаточно произвести конформное отображение области G на внутренность присоединенного треугольника $A'_1A'_2A'_3$ в плоскости $\psi(z)$. После этого в соответствии с (1,23) и (1,24) для проекций вектора смещений u и v на оси x и y и для N и T будем иметь

$$2\mu(u+iv)=(k-1)Bz-\overline{\psi}(\overline{z}),\ N+iT=2B-\overline{\psi}'(\overline{z})e^{-i2\alpha}. \tag{1,29}$$

Если функцию $\psi(z)$ в силу свойств конформных отображений записать в виде интеграла

$$\psi(z)=A'\int_0^{\zeta}\prod_{m=1}^{3}(\zeta-a_m)^{\mu_m}d\zeta+A'',$$

где A' и A'' — вполне определенные постоянные, то вторая из формул (1,29) запишется в виде

$$N+iT=2B-\frac{\overline{A}'}{A}\overline{\zeta}^2\prod_{m=1}^{3}(\overline{\zeta}-\overline{a}_m)^{2\mu_m}e^{-i2\alpha}. \tag{1,30}$$

Отсюда видим, что напряжения при подходе к каждой угловой точке A_m имеют порядок роста, одинаковый с порядком роста

$|z-A_m|^{\frac{2\mu_m}{(1-\mu_m)}}$, а при z, неограниченно возрастающем и при $B=0$ они являются бесконечно малыми того же порядка, что и $\frac{1}{z^2}$. Например, для равностороннего треугольного отверстия порядок роста напряжений при подходе к угловым точкам совпадает с порядком роста $|z-A_m|^{-\frac{4}{5}}$.

§ 2. Правильное многоугольное отверстие при постоянных нормальных смещениях. Рассмотрим некоторые частные случаи напряженного состояния бесконечной плоскости с отверстием, имеющим форму произвольного правильного многоугольника. А именно, будем считать, что главный вектор внешних усилий и значения вращения на бесконечности равны нулю, а главные напряжения на бесконечности одинаковы, то есть

$$X=Y=C=B'=C'=0. \tag{2,1}$$

Контурные условия на границе отверстия будем считать следующими

$$\nu(\sigma)=\nu_0=\mathrm{const}, \quad T(\sigma)=0. \tag{2,2}$$

Приступая к решению этой задачи, обозначим через G область в плоскости $z=x+iy$, внешнюю правильному многоугольнику G' с вершинами $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (n — любое целое число). Для определенности будем считать, что центр многоугольника G' совпадает с точкой $z=0$, а сторона A_nA_1 перпендикулярна оси x. Заметим, что если через $\zeta=\varrho e^{i\theta}$ обозначить функцию, дающую отображение области G на круг $|\zeta|<1$ такую, что точки $A_1, A_2, \ldots A_n$ переходят в точки $a_1=e^{\frac{i\pi}{n}}$, $a_2=e^{\frac{i3\pi}{n}}, \ldots a_n=e^{\frac{i(2n-1)\pi}{n}}$, то будет иметь место равенство

$$z=A\int\limits_1^{\zeta}(1+\zeta^n)^{\frac{2}{n}}\frac{d\zeta}{\zeta^2}+r \quad \left(A=-\frac{a}{2\int\limits_0^{\frac{\pi}{n}}\left(2\cos\frac{n\theta}{2}\right)^{\frac{2}{n}}d\theta}\right), \tag{2,3}$$

где a — длина стороны многоугольника G', $r=\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}$.

Из формулы (1,4) и из (1,15), (2,2) получаем

$$\varphi_0'(z)=\varphi_0(z)=0. \tag{2,4}$$

Из равенства (1,4), (1,5), (1,14) и из (2,1) получаем

$$Re\,[\psi^+(z)e^{i\alpha}]=-2\mu\nu_0+(k-1)Br. \tag{2,5}$$

Индекс граничной задачи (2,5), соответствующий почти ограниченным решениям, равен $-(n-2)$ и, следовательно, эта задача может иметь только единственное решение. Записав эту граничную задачу в виде

$$Re\,[\psi^+(z)\,e^{i(\alpha-\pi)}]=2\mu\nu_0-(k-1)\,Br$$

или в виде

$$Re\,[\psi^{+}(z)\,e^{-i\alpha'}] = 2\mu v_0 - (k-1)\,Br, \tag{2,6}$$

где $\alpha' = 0,\ \frac{2\pi}{n},\ \frac{4\pi}{n},\ \ldots\ (n-1)\,\frac{2\pi}{n}$ на дугах, соответственно, $[1a_1]$, $[a_1a_2], \ldots [a_n1]$, видим, что для нахождения интересующего нас решения задачи (1,26), достаточно взять функцию $\psi(z)$, отображающую круг $|\zeta|<1$ на внутренность правильного многоугольника G'', получающегося из многоугольника G' симметричным отражением относительно вещественной оси и преобразованием подобия с коэфициентом $\frac{2\mu v_0 - (k-1)\,Br}{r}$ (в том случае, когда $2\mu v_0 - (k-1)\,Br<0$, считается, что это преобразование подобия включает поворот на угол π).

Отображение круга $|\zeta|<1$ на многоугольник G', симметрично отраженный относительно вещественной оси, запишется в виде

$$w = rA' \int_0^{\zeta} (1+\zeta^n)^{-\frac{2}{n}}\, d\zeta \quad \left(A' = \frac{1}{\int\limits_0^1 (1+\zeta^n)^{-\frac{2}{n}}\, d\zeta}\right) \tag{2,7}$$

и, следовательно, искомое решение граничной задачи (2,6) будет

$$\psi(z) = [2\mu v_0 - (k-1)\,Br]\, A' \int_0^{\xi} (1+\zeta^n)^{-\frac{2}{n}}\, d\zeta \tag{2,8}$$

или

$$\psi(z) = [2\mu v_0 - (k-1)\,Br]\, \frac{A'}{A} \int_0^{\zeta} (1+\zeta^n)^{-\frac{4}{n}}\, \zeta^2\, dz. \tag{2,9}$$

Таким образом, для любого правильного многоугольного отверстия при условиях (2,1) и (2,2) для проекций вектора смещений u и v на оси x и y и для N и T имеем равенства

$$2\mu\,(u+iv) = (k-1)\,Bz - \overline{\psi}\,(\overline{z}), \tag{2,10}$$

$$N+iT = 2B - \overline{\psi}'\,(\overline{z})\, e^{-i2\alpha} = 2B - [2\mu v_0 - (k-1)\,Br]\, \frac{A'}{A}\, (1+\overline{\zeta}^n)^{-\frac{4}{n}}\, \overline{\zeta}^2 e^{-i2\alpha}, \tag{2,11}$$

где $\psi(z)$ — функция, определенная равенством (2,8).

Из формулы (2,11) следует, что напряжения при подходе к каждой угловой точке $z=A_m$ имеют порядок роста одинаковый с порядком роста $|z-A_m|^{-\frac{4}{(n+2)}}$, а при z, неограниченно возрастающем, и при $B=0$, они имеют порядок малости, одинаковый с порядком малости $\frac{2\mu v_0\, A'A}{z^2}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Н. Положий, Новый метод решения некоторых смешанных задач плоской теории упругости, ДАН СССР, т. 66, № 3 (1949).

2. Г. Н. Положий, Решение третьей основной задачи плоской теории упругости для бесконечной плоскости с квадратным отверстием, Прикладная математика и механика, т. 13, № 3 (1949).

3. Н. И. Мусхелишвили, Некоторые задачи теории упругости, Москва, (1949), стр. 121—126.

Поступило 9.II 1950.