DOI: 10.3842/umzh.v76i4.7866

УДК 517.5

Мирослав Шеремета[1] (Львівський національний університет імені Івана Франка)

ПРО ОБМЕЖЕНІСТЬ l-$\mathfrak{M}$-ІНДЕКСУ ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ, ЗОБРАЖЕНИХ РЯДАМИ ЗА СИСТЕМОЮ ФУНКЦІЙ

Let f be an entire transcendental function and let (λ_n) be a sequence of positive numbers increasing to $+\infty$. Suppose that the series $A(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f(\lambda_n z)$ is regularly convergent in $\mathbb{C}$, i.e., $\mathfrak{M}(r, A) := \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| M_f(r\lambda_n) < +\infty$ for all $r \in [0, +\infty)$. For a positive function l continuous on $[0, +\infty)$, the function A is called a function of bounded l-$\mathfrak{M}$-index if there exists $N \in \mathbb{Z}_+$ such that $\dfrac{\mathfrak{M}(r, A^{(n)})}{n! l^n(r)} \le \max\left\{\dfrac{\mathfrak{M}(r, A^{(k)})}{k! l^k(r)} : 0 \le k \le N\right\}$ for all $n \in \mathbb{Z}_+$ and all $r \in [0, +\infty)$. We study the properties of growth of the functions of bounded l-$\mathfrak{M}$-index and formulate some unsolved problems.

Нехай f — ціла трансцендентна функція і (λ_n) — зростаюча до $+\infty$ послідовність додатних чисел. Припустимо, що ряд $A(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f(\lambda_n z)$ регулярно збіжний в $\mathbb{C}$, тобто $\mathfrak{M}(r, A) := \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| M_f(r\lambda_n) < +\infty$ для всіх $r \in [0, +\infty)$. Для додатної неперервної на $[0, +\infty)$ функції l функція A називається функцією обмеженого l-$\mathfrak{M}$-індексу, якщо існує таке $N \in \mathbb{Z}_+$, що $\dfrac{\mathfrak{M}(r, A^{(n)})}{n! l^n(r)} \le \max\left\{\dfrac{\mathfrak{M}(r, A^{(k)})}{k! l^k(r)} : 0 \le k \le N\right\}$ для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$ і $r \in [0, +\infty)$. Вивчено зростання функцій обмеженого l-$\mathfrak{M}$-індексу і сформульовано нерозв'язані задачі.

1. Вступ. За Б. Лепсоном [1] ціла функція $a(z)$ називається функцією обмеженого індексу, якщо існує таке $N \in \mathbb{Z}_+$, що $|a^{(n)}(z)|/n! \le \max\{|a^{(k)}(z)|/k! : 0 \le k \le N\}$ для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$ і $z \in \mathbb{C}$. Різні автори (С. М. Шах, У. Хейман, Г. А. Фріке та ін.) досліджували властивості цілих функцій обмеженого індексу і їх застосування (огляд результатів можна знайти в [2]).

Для додатної неперервної на $[0, +\infty)$ функції l А. Д. Кузик і М. М. Шеремета [3] ввели поняття цілої функції обмеженого l-індексу. Ціла функція $a(z)$ називається функцією обмеженого l-індексу, якщо існує таке $N \in \mathbb{Z}_+$, що для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$ і $z \in \mathbb{C}$

$$\frac{|a^{(n)}(z)|}{n! l^n(|z|)} \le \max\left\{\frac{|a^{(k)}(z)|}{k! l^k(|z|)} : 0 \le k \le N\right\}.$$

Згодом це означення було перенесено на аналітичні функції в довільній комплексній області, а отримані результати підсумовано в монографії [4]. Пізніше, завдяки О. Б. Скасківу і А. І. Бандурі (див., наприклад, [5, 6]), отримано багато результатів про обмеженість L-індексу голоморфних функцій багатьох комплексних змінних.

Нехай $M_a(r) = \max\{|a(z)| : |z| = r\}$ і l — додатна неперервна на $[0, +\infty)$ функція. Ціла функція $a(z)$ називається [7] функцією обмеженого M-індексу, якщо існує таке $N \in \mathbb{Z}_+$, що $M_{a^{(n)}}(r)/n! \le \max\{M_{a^{(k)}}(r)/k : 0 \le k \le N\}$ для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$ і $r \in [0, +\infty)$. Комбінуючи означення функцій обмеженого M-індексу і означення функцій обмеженого l-індексу, у [8] отримано таке означення. Ціла функція $a(z)$ називається функцією обмеженого l-M-індексу, якщо існує таке $N \in \mathbb{Z}_+$, що для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$ і $r \in [0, +\infty)$

$$\frac{M_{a^{(n)}}(r)}{n! l^n(r)} \le \max\left\{\frac{M_{a^{(k)}}(r)}{k! l^k(r)} : 0 \le k \le N\right\}.$$

[1] E-mail: m.m.sheremeta@gmail.com.

© МИРОСЛАВ ШЕРЕМЕТА, 2024

Нехай тепер

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k$$

— ціла трансцендентна функція і (λ_n) — зростаюча до $+\infty$ послідовність додатних чисел. Припустимо, що ряд

$$A(z)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n f(\lambda_n z) \tag{1}$$

за системою $f(\lambda_n z)$ регулярно збіжний в $\mathbb{C}$, тобто для всіх $r\in[0,+\infty)$

$$\mathfrak{M}(r,A):=\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|M_f(r\lambda_n)<+\infty.$$

Багато математиків вивчали зображення аналітичних функцій рядами за системою $f(\lambda_n z)$ (див., наприклад, [9, 10] та наведену в них бібліографію). Можливе зростання функції (1) досліджено в [11, 12].

Для додатної неперервної на $[0,+\infty)$ функції l цілу функцію (1) будемо називати функцією обмеженого l-$\mathfrak{M}$-індексу, якщо існує таке $N\in\mathbb{Z}_+$, що для всіх $n\in\mathbb{Z}_+$ і $r\in[0,+\infty)$

$$\frac{\mathfrak{M}(r,A^{(n)})}{n!\,l^n(r)}\le\max\left\{\frac{\mathfrak{M}(r,A^{(k)})}{k!\,l^k(r)}:0\le k\le N\right\}.$$

Найменше з таких чисел N назвемо l-$\mathfrak{M}$-індексом функції A і позначимо через $N(A;l,\mathfrak{M})$.

У цій статті вивчається можливе зростання функцій (1) обмеженого l-$\mathfrak{M}$-індексу та спадання їх коефіцієнтів a_n і сформульовано нерозв'язані задачі.

2. Зростання функцій обмеженого l-$\mathfrak{M}$-індексу. Нам потрібні такі леми.

Лема 1 [4, с. 82]**.** *Нехай $g_1,\ldots,g_n$ — додатні абсолютно неперервні на $[a,b]$ функції і $g(x):=\max\{g_k(x):1\le k\le n\}$. Припустимо, що $g_k'(x)\le\varphi(x)g(x)$ майже скрізь на $[a,b]$ для всіх $1\le k\le n$, де φ — додатна неперервна на $[a,b]$ функція. Тоді для всіх $x\in[a,b]$*

$$\ln g(x)\le\ln g(a)+\int_a^x\varphi(t)dt.$$

Лема 2 [4, с. 76]**.** *У точках, де похідна $M_f'(r)$ існує, виконується нерівність $M_f'(r)\le M_{f'}(r)$.*

Використовуючи ці леми, доведемо спочатку таке твердження.

Твердження 1. *Нехай l — така додатна неперервно диференційовна на $[0,+\infty)$ функція, що*

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\left(-l'(r)\right)^+}{l^2(r)}=q<+\infty,\quad x^+=\max\{x,0\}, \tag{2}$$

і

$$\int_0^{\infty} l(r)dr=+\infty. \tag{3}$$

Якщо $N(A; l, \mathfrak{M}) = N$, *то*

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\ln \mathfrak{M}(r,A)}{L(r)} \le (1+q)(N+1) \quad \left(L(r) = \int_0^r l(t)dt\right). \tag{4}$$

Доведення. Оскільки $A'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda_n f'(\lambda_n z)$, за лемою 2 у точках, де похідна $M'_f(r)$ існує, маємо

$$\mathfrak{M}(r, A') = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \lambda_n M_{f'}(r\lambda_n) \ge \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \lambda_n M'_f(r\lambda_n) = \mathfrak{M}'(r, A).$$

Приймемо $g_k(r) = \dfrac{\mathfrak{M}(r, A^{(k)})}{k! l^k(r)}$ для $0 \le k \le N$ і $g(r) = \max\{g_k(r) : 0 \le k \le N\}$. Тоді майже скрізь на $[r_0, +\infty)$

$$\begin{aligned} g'_k(r) &= \frac{\mathfrak{M}'(r, A^{(k)})}{k! l^k(r)} - \frac{\mathfrak{M}(r, A^{(k)})}{k! l^{k+1}(r)} k l'(r) \\ &\le \frac{\mathfrak{M}(r, A^{(k+1)})}{(k+1)! l^{k+1}(r)} (k+1) l(r) + \frac{\mathfrak{M}(r, A^{(k)})}{k! l^k(r)} k \frac{\big(-l'(r)\big)^+}{l(r)} \\ &\le g(r)\left((k+1)l(r) + k\frac{\big(-l'(r)\big)^+}{l(r)}\right) \le g(r)(N+1)l(r)\left(1 + \frac{\big(-l'(r)\big)^+}{l^2(r)}\right). \end{aligned}$$

Покладаючи $\varphi(r) = (N+1)l(r)\left(1 + \dfrac{\big(-l'(r)\big)^+}{l^2(r)}\right)$, за лемою 1 з огляду на (2) отримуємо

$$\ln g(r) \le \ln g(r_0) + (N+1)\int_{r_0}^{r} l(r)(1+q+o(1))dr, \quad r \to +\infty,$$

і, оскільки $\ln \mathfrak{M}(r, A) \le \ln g(r)$, з огляду на (3) одержуємо (4).

Твердження 1 доведено.

Щоб отримати обернене твердження, через Ω позначимо клас додатних необмежених на $(-\infty, +\infty)$ функцій Φ, для яких похідна Φ' додатна, неперервно диференційовна на $[0, +\infty)$ і зростаюча до $+\infty$. Нехай $\Psi(x) = x - \Phi(x)/\Phi'(x)$ — функція, асоційована з Φ за Ньютоном. Тоді Ψ [4, с. 75] неперервно диференційовна і зростаюча до $+\infty$ на $(-\infty, +\infty)$.

Твердження 2. *Нехай* $\Phi \in \Omega$ *і для деякого* $a > 1$ *при* $\sigma \to +\infty$

$$\Phi'(\sigma + a/\Phi'(\sigma)) = O(\Phi'(\sigma)) \qquad \text{і} \qquad \Phi'(\Psi^{-1}(\sigma + \beta(\sigma))) = O(\Phi'(\sigma)), \tag{5}$$

де $\beta(\sigma) = (\ln \Phi'(\Psi^{-1}\sigma))/\Phi'(\Psi^{-1}\sigma)$. *Припустимо, що* $f_k \ge 0$ *і* $a_n \ge 0$ *для всіх* k *і* n. *Якщо*

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\ln \mathfrak{M}(r,A)}{\Phi(\ln r)} < +\infty, \tag{6}$$

то (1) *є функцією обмеженого* l-$\mathfrak{M}$-*індексу з* $l(r) = \dfrac{\Phi'(\ln r)}{r}$ *для* $r \ge r_0$.

Доведення. Нехай $\Phi \in \Omega$ і F — довільна ціла функція. В [4, с. 79] доведено, що якщо виконується (5) для деякого $a > 1$ і $\overline{\lim}_{r\to+\infty} \dfrac{\ln M_F(r)}{\Phi(\ln r)} < +\infty$, то для кожного $r_0 > 0$ існує таке $n_0 = n_0(r_0) \in \mathbb{Z}_0$, що $\dfrac{M_{F^{(n)}}(r)}{n! M_F(r)} \le \left(\dfrac{\Phi'(\ln r)}{r}\right)^n$ для всіх $n \ge n_0$ і $r \ge r_0$.

Зрозуміло, що якщо $M_A(r) = \max\{|A(z)| \colon |z| = r\}$, то $M_A(r) \le \mathfrak{M}(r, A)$, а якщо $f_k \ge 0$ і $a_n \ge 0$ для всіх k і n, то $M_A(r) = \mathfrak{M}(r, A)$. Тому з наведеного вище результату для $F = A$ випливає, що якщо $f_k \ge 0$ і $a_n \ge 0$ для всіх k і n і виконується (6), то для кожного $r_0 > 0$ існує таке $n_0 = n_0(r_0) \in \mathbb{Z}_0$, що для всіх $n \ge n_0$ і $r \ge r_0$

$$\frac{\mathfrak{M}(r, A^{(n)})(r)}{n!\mathfrak{M}(r, A)} \le \left(\frac{\Phi'(\ln r)}{r}\right)^n.$$

Приймаючи $l(r) = \Phi'(\ln r)/r$ для $r \ge r_0$, звідси отримуємо $\dfrac{\mathfrak{M}(r, A^{(n)})}{n! l^n(r)} \le \mathfrak{M}(r, A)$, і, отже, функція A є функцією обмеженого l-$\mathfrak{M}$-індексу.

Твердження 2 доведено.

Комбінуючи твердження 1 і 2, приходимо до такої теореми.

Теорема 1. *Якщо функція* Φ *і коефіцієнти* f_k *і* a_n *задовольняють умови твердження* 2, *то* (1) *є функцією обмеженого* l-$\mathfrak{M}$-*індексу з* $l(r) = \Phi'(\ln r)/r$ *для* $r \ge r_0$ *тоді й лише тоді, коли виконується* (6).

Доведення. Якщо $l(r) = \Phi'(\ln r)/r$, то $L(r) = (1 + o(1))\Phi(\ln r)$ при $r \to +\infty$ і

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\left(-l'(r)\right)^+}{l^2(r)} = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{(\Phi'(\ln r) - \Phi''(\ln r))^+}{(\Phi'(\ln r))^2} \le \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{(\Phi'(\ln r))^+}{(\Phi'(\ln r))^2} = 0,$$

бо $\Phi''(x) \ge 0$ для всіх x. Тому, якщо (1) є функцією обмеженого l-$\mathfrak{M}$-індексу, за твердженням 1 виконується (6). Обернений висновок випливає з твердження 2.

3. Наслідки і нерозв'язані задачі. Оскільки f — ціла трансцендентна функція, то $\dfrac{\ln M_f(r)}{\ln r} \to +\infty$ при $r \to +\infty$, тобто $M_f(r) \ge r^p$ для кожного $p > 0$ і всіх $r \ge r_0(p)$. Нехай $n_0 = \min\{n \colon \lambda_n \ge 1\}$. Тоді $\mathfrak{M}(r, A) \ge |a_{n_0}|(r\lambda_{n_0})^p \ge |a_{n_0}| r^p$ для $r \ge r_0(p)$. Тому з (4) випливає, що $(1 + q)(N + 1) \ge \overline{\lim}_{r\to+\infty} \dfrac{p \ln r}{L(r)}$, тобто з огляду на довільність p отримуємо $\lim_{r\to+\infty} \dfrac{L(r)}{\ln r} = +\infty$, звідки $rl(r) \to +\infty$ при $r \to +\infty$. Таким чином, з твердження 1 випливає такий наслідок.

Наслідок 1. *Для того щоб для додатної неперервно диференційовної на* $[0, +\infty)$ *функції* l, *яка задовольняє умови* (2) *і* (3), *існувала ціла функція* (1) *обмеженого* l-$\mathfrak{M}$-*індексу, необхідно, щоб* $rl(r) \to +\infty$ *при* $r \to +\infty$.

Відомо [4, с. 69, 101], що умова $rl(r) \to +\infty$ при $r \to +\infty$ є необхідною і достатньою для існування цілої функції обмеженого l-індексу.

Зауважимо, що $\mathfrak{M}(r, A) \ge |a_{n_0}| M_f(r\lambda_{n_0}) \ge |a_{n_0}| M_f(r)$. Тому, якщо функція Φ задовольняє умову (5) і функція (1) є функцією обмеженого l-$\mathfrak{M}$-індексу з $l(r) = \Phi'(\ln r)/r$ для $r \ge r_0$, за твердженнням 1

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln M_f(r)}{\Phi(\ln r)} \le \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln \mathfrak{M}(r, A)}{\Phi(\ln r)} < +\infty,$$

і, отже [4, с. 85], функція f є функцією обмеженого l-M-індексу з $l(r) = \Phi'(\ln r)/r$. Таким чином, правильним є такий наслідок.

Наслідок 2. *Нехай $\Phi \in \Omega$ і $l(r) = \Phi'(\ln r)/r$ для $r \geq r_0$. Якщо функція Φ задовольняє умову* (5), *а A є функцією обмеженого l-$\mathfrak{M}$-індексу, то f є функцію обмеженого l-M-індексу.*

Зрозуміло, що функція $\mathfrak{M}(r, A)$ зростає швидше, ніж функція $M_f(r)$. Тому з обмеженості l_1-$\mathfrak{M}$-індексу функції A повинна випливати обмеженість l_2-M-індексу функції f, де функція l_2 зростає швидше, ніж l_1. Іншими словами, наслідок 2 потребує уточнення.

Задача 1. *Якими повинні бути функції l_1 і l_2, щоб з обмеженості l_2-M-індексу функції f випливала обмеженість l_1-$\mathfrak{M}$-індексу функції A?*

А. Г. Азпітіа [13] довів, що якщо цілий ряд Діріхле є функцією обмеженого M-індексу, то він зводиться до експоненціального многочлена. Щоб узагальнити цей результат, зауважимо, що функція $\ln M_f(r)$ є логарифмічно опуклою і тому

$$\Gamma_f(r) := \frac{d \ln M_f(r)}{d \ln r} \nearrow +\infty, \quad r \to +\infty$$

$\left(\text{у точках, де похідна не існує, } \dfrac{d \ln M_f(r)}{d \ln r} \text{ — правобічна похідна}\right)$.

Наслідок 3. *Нехай $\ln M_f(r) = O(\Gamma_f(r))$ при $r \to +\infty$ і $l(r) = \dfrac{\Gamma_f(r)}{r}$. Якщо A є функцією обмеженого l-$\mathfrak{M}$-індексу, то A — многочлен за системою $f(\lambda_n z)$.*

Справді, оскільки для такої функції l умови (2), (3) виконуються і

$$L(r) = \int_0^r l(t)dt = \int_0^r \frac{\Gamma_f(t)}{t} dt = \int_0^r \frac{d \ln M_f(t)}{t d \ln t} dt = \ln M_f(r) - \ln M_f(0),$$

то за твердженням 1 маємо $\varlimsup_{r \to +\infty} \dfrac{\ln \mathfrak{M}(r, A)}{\ln M_f(r)} < +\infty$, звідки $\ln |a_n| + \ln M_f(r\lambda_n) \leq K \ln M_f(r)$ для деякого $K > 0$ і всіх $n \geq 1$. Але за умовою $\Gamma_f(r) \geq \eta \ln M_f(r)$ для $\lambda_n > 1$ і деякого $\eta > 0$

$$\ln \ln M_f(r\lambda_n) - \ln \ln M_f(r) = \int_r^{r\lambda_n} \frac{d \ln \ln M_f(t)}{d \ln t} d \ln t = \int_r^{r\lambda_n} \frac{\Gamma_f(r)}{\ln M_f(t)} d \ln t \geq \eta \ln \lambda_n.$$

Тому

$$\begin{aligned} \ln |a_n| &\leq -\ln M_f(r\lambda_n)\left(1 - \frac{K \ln M_f(r)}{\ln M_f(r\lambda_n)}\right) \\ &= -\ln M_f(r\lambda_n)\big(1 - \exp\big\{-(\ln \ln M_f(r\lambda_n) - \ln \ln M_f(r) - \ln K)\big\}\big) \\ &\leq -\ln M_f(r\lambda_n)\big(1 - \exp\big\{-(\eta \ln \lambda_n - \ln K)\big\}\big) \to -\infty, \quad r \to +\infty, \end{aligned}$$

якщо тільки $\lambda_n \geq (eK)^{1/\eta}$, тобто $|a_n| = 0$ для таких n, що і потрібно було довести.

Умови $f_k \geq 0$ і $a_n \geq 0$ для всіх k і n у твердженні 2 використовуються для того, щоб $\mathfrak{M}(r, A) = M_A(r)$. Оскільки у загальному випадку $\mathfrak{M}(r, A) \geq M_A(r)$, то виникає така задача.

Задача 2. *Знайти оцінку зверху для $\mathfrak{M}(r, A)$ через $M_A(r)$, якщо умови $f_k \geq 0$ і $a_n \geq 0$ для всіх k і n не виконуються.*

У доведенні твердження 1 використано оцінку $\mathfrak{M}(r,A') \geq \mathfrak{M}'(r,A)$.

Задача 3. *Знайти оцінку $\mathfrak{M}(r,A')$ через $\mathfrak{M}'(r,A)$ зверху.*

4. Доповнення. Дослідимо тепер зв'язок між обмеженістю l-$\mathfrak{M}$-індексу функції (1) і спаданням коефіцієнтів a_n, тобто знайдемо умову на a_n, за якої

$$\Theta := \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln\mathfrak{M}(r,A)}{L(r)} < +\infty. \tag{7}$$

Твердження 3. *Нехай $r = O(\Gamma_f(r))$ при $r \to +\infty$, а додатна зростаюча функція l така, що $L(r) = O(l(r))$ і $l(r+O(1)) = O(l(r))$ при $r \to +\infty$. Тоді, якщо виконується* (7),

$$Q := \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{l\left(\dfrac{1}{\lambda_n} M_f^{-1}\left(\dfrac{1}{|a_n|}\right)\right)} < +\infty. \tag{8}$$

Доведення. З (7) випливає, що $\ln\mathfrak{M}(r,A) \leq K_1 L(r)$, тобто $\ln|a_n| \leq K_1 L(r) - \ln M_f(r\lambda_n)$ для деякого $K_1 > 0$, всіх $n \geq 1$ і $r \geq 0$. Вибираючи $r = r_n = l^{-1}(\lambda_n)$, отримуємо $\ln|a_n| \leq K_1 L(l^{-1}(\lambda_n)) - \ln M_f(\lambda_n l^{-1}(\lambda_n))$, тобто

$$\ln\frac{\exp\{K_1 L(l^{-1}(\lambda_n))\}}{|a_n|} \geq \ln M_f\big(\lambda_n l^{-1}(\lambda_n)\big),$$

звідки

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{l\left(\dfrac{1}{\lambda_n} M_f^{-1}\left(\dfrac{\exp\{K_1 L(l^{-1}(\lambda_n))\}}{|a_n|}\right)\right)} \leq 1. \tag{9}$$

З умови $r = O(\Gamma_f(r))$ при $r \to +\infty$ випливає, що $\Gamma_f(r) \geq r/K_2$ для деякого $K_2 > 0$ і всіх $r \geq 0$, тобто $\dfrac{d\ln M_f(r)}{dr} = \dfrac{\Gamma_f(r)}{r} \geq \dfrac{1}{K_2}$ і, отже, $\dfrac{dM_f^{-1}(e^x)}{dx} \leq K_2$. Тому

$$\begin{aligned}
&M_f^{-1}\left(\frac{\exp\{K_1 L(l^{-1}(\lambda_n))\}}{|a_n|}\right) - M_f^{-1}\left(\frac{1}{|a_n|}\right)\\
&\quad = M_f^{-1}\left(\exp\left\{K_1 L(l^{-1}(\lambda_n)) + \ln\frac{1}{|a_n|}\right\}\right) - M_f^{-1}\left(\exp\left\{\ln\frac{1}{|a_n|}\right\}\right)\\
&\quad = \int\limits_{\ln(1/|a_n|)}^{K_1 L(l^{-1}(\lambda_n))+\ln(1/|a_n|)} \frac{dM_f^{-1}(e^x)}{dx}dx \leq K_3 L(l^{-1}(\lambda_n)).
\end{aligned}$$

Оскільки $L(x) = O(l(x))$ і $l(x+O(1)) = O(l(x))$ при $x \to +\infty$, то $L(l^{-1}(\lambda_n))/\lambda_n = O(1)$ при $n \to \infty$ і, отже,

$$\begin{aligned}
l\left(\frac{1}{\lambda_n} M_f^{-1}\left(\frac{\exp\{K_1 L(l^{-1}(\lambda_n))\}}{|a_n|}\right)\right) &\leq l\left(\frac{1}{\lambda_n} M_f^{-1}\left(\frac{1}{|a_n|}\right) + \frac{K_3 L(l^{-1}(\lambda_n))}{\lambda_n}\right)\\
&\leq K_4 l\left(\frac{1}{\lambda_n} M_f^{-1}\left(\frac{1}{|a_n|}\right)\right).
\end{aligned}$$

Тому з (9) отримуємо (8).

Твердження 3 доведено.

Твердження 4. *Нехай* $\Gamma_f(r)) \asymp r$ *i* $L(r+O(1)) = O(L(r))$ *при* $r \to +\infty$. *Тоді, якщо* $\ln n = o(\lambda_n)$ *при* $n \to \infty$, *з* (8) *випливає* (7).

Доведення. З (8) випливає, що $|a_n| \le \dfrac{1}{M_f(\lambda_n l^{-1}(\lambda_n/K_5))}$ для деякого $K_5 > 0$ і всіх n. Тому якщо $\mu(r, A) = \max\{|a_n| M_f(r\lambda_n) : n \ge 1\}$ — максимальний член ряду (1) і $\nu(r, A) = \max\{n \ge 1 : |a_n| M_f(r\lambda_n) = \mu(r, A)\}$ — його центральний індекс, то

$$\mu(r, A) \le \max\left\{\frac{M_f(r\lambda_n)}{M_f(\lambda_n l^{-1}(\lambda_n/K_5))} : n \ge 1\right\}$$

і, оскільки $\mu(r, A) \to +\infty$ при $r \to +\infty$, отримуємо $r \ge l^{-1}(\lambda_{\nu(r,A)}/K_5)$, тобто $\lambda_{\nu(r,A)} \le K_5 l(r)$ для $r \ge r_0$. Тому, використовуючи доведену в [14] рівність

$$\ln \mu(r, A) - \ln \mu(r_0, A) = \int\limits_{r_0}^{r} \frac{\Gamma_f(t\lambda_{\nu(t,A)})}{t} dt, \quad 0 \le r_0 \le r < +\infty,$$

одержуємо

$$\ln \mu(r, A) - \ln \mu(r_0, A) = \int\limits_{r_0}^{r} \frac{\Gamma_f(K_5 t l(t))}{t} dt, \quad 0 \le r_0 \le r < +\infty.$$

З умови $\Gamma_f(r)) \asymp r$ при $r \to +\infty$ випливає, що $\Gamma_f(r) \le K_6 r$ для $r \ge r_0$, звідки $\dfrac{\Gamma_f(K_5 t l(t))}{t} \le K_7 l(t)$ для $t \ge r_0$. Оскільки $L(r) = \displaystyle\int_0^r l(t)dt$, то звідси отримуємо $\ln \mu(r, A) - \ln \mu(r_0, A) \le K_8(L(r) - L(r_0))$, тобто

$$\varlimsup_{r \to +\infty} \frac{\ln \mu(r, A)}{L(r)} \le K_8 < +\infty. \tag{10}$$

З іншого боку, оскільки $\Gamma_f(r) \ge r/K_2$ і $\ln n = o(\lambda_n)$ при $n \to \infty$, то для $K_9 > 0$

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}(r, A) &\le \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| M_f((r+K_9)\lambda_n) \frac{M_f(r\lambda_n)}{M_f((r+K_9)\lambda_n)} \\ &\le \mu(r+K_9, A) \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left\{-\int\limits_{r\lambda_n}^{(r+K_9)\lambda_n} \Gamma_f(t) d\ln t\right\} \\ &\le \mu(r+K_9, A) \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left\{-\Gamma_f(r\lambda_n) \ln \frac{r+K_9}{r}\right\} \\ &\le \mu(r+K_9, A) \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left\{-\frac{r\lambda_n}{K_2}(1+o(1))\frac{K_9}{r}\right\} \le K_{10}\mu(r+K_9, A). \end{aligned}$$

Тому з огляду на (10) і умову $L(r+O(1)) = O(L(r))$ при $r \to +\infty$ маємо

$$\Theta = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln \mathfrak{M}(r, A)}{L(r)} \le \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln \mu(r + K_9, A) + \ln K_{10}}{L(r)}$$

$$\le \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln \mu(r, A)}{L(r)} \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{L(r + K_9)}{L(r)} < +\infty.$$

Твердження 4 доведено.

Комбінуючи твердження 3 і 4, отримуємо таку теорему.

Теорема 2. *Нехай* $\Gamma_f(r)) \asymp r$ *при* $r \to +\infty$ *і* $\ln n = o(\lambda_n)$ *при* $n \to \infty$. *Припустимо, що* $\Phi \in \Omega$, $\Phi'(\sigma + O(e^{-\sigma})) = O(\Phi'(\sigma))$, $\Phi'(\sigma)e^{-\sigma} \uparrow +\infty$ *і* $\Phi(\sigma) = O(\Phi'(\sigma)e^{-\sigma})$ *при* $\sigma \to +\infty$. *Для того щоб виконувалась нерівність* (6), *необхідно і достатньо, щоб виконувалось* (8) *з* $l(r) = \Phi'(\ln r)/r$ *для* $r \ge r_0$.

Доведення. Для $L(r) = \Phi(\ln r)$ з умови $\Phi'(\sigma+O(e^{-\sigma})) = O(\Phi'(\sigma))$ при $\sigma \to +\infty$ випливає $l(r + O(1)) = O(l(r))$ і $L(r + O(1)) = O(L(r))$ при $r \to +\infty$, а з умови $\Phi(\sigma) = O(\Phi'(\sigma)e^{-\sigma})$ при $\sigma \to +\infty$ випливає $L(r) = O(l(r))$ при $r \to +\infty$.

Конфлікт інтересів. Автор заявляє, що він не має потенційного конфлікту інтересів щодо дослідження у цій статті.

Фінансування. Автор заявляє, що під час підготовки цього рукопису не було отримано коштів, грантів чи іншої підтримки.

Література

1. B. Lepson, *Differential equations of infinite order, hyper-Dirichlet series and entire functions of bounded index*, Proc. Sympos. Pure Math., **2**, Amer. Math. Soc., Providence, Phode Island (1968), p. 298 – 307.
2. S. M. Shah, *Entire functions of bounded index*, Lecture Notes in Math., **589**, 117 – 145 (1977).
3. А. Д. Кузык, М. М. Шеремета, *Целые функции ограниченного l-распределения значений*, Мат. заметки, **39**, № 1, 3 – 13 (1986).
4. M. M. Sheremeta, *Analytic functions of bounded index*, VNTL Publ., Lviv (1999).
5. A. Bandura, O. Skaskiv, *Entire functions of several variables of bounded index*, Chyslo, Publ. I. E. Chyzhykov, Lviv (2016).
6. А. І. Бандура, *Властивості класів голоморфних функцій обмеженого індексу*, Автореф. дис. . . . д-ра фіз.-мат. наук, Львів (2018).
7. G. H. Fricke, S. M. Shah, W. S. Sisarcick, *A characterisation of entire functions of exponential type and M-bounded index*, Indiana Univ. Math. J., **23**, 405 – 412 (1973).
8. Ш. Абуарабі, М. М. Шеремета, *Цілі функції обмеженого l-M-індексу*, Доп. АН УРСР, Сер. А., № 11, 3 – 5 (1989).
9. А. Ф. Леонтьев, *Обобщения рядов экспонент*, Наука, Москва (1981).
10. Б. В. Винницкий, *Некоторые аппроксимационные свойства обобщенных систем экспонент*, Дрогобыч (1991), Деп. в УкрНИИНТИ 25.02.1991.
11. M. M. Sheremeta, *Relative growth of series in system functions and Laplace – Stieltjes type integrals*, Axioms, **10**, № 2 (2021).
12. M. M. Sheremeta, *On the growth of series in systems of functions and Laplace – Stieltjes integrals*, Mat. Stud., **55**, № 2, 124 – 131 (2021).
13. A. G. Azpeitia, *On entire functions of bounded index defined by Dirichlet expansions*, Riv. Mat. Univ. Parma (4), **3**, 95 – 97 (1977).
14. M. M. Sheremeta, *Spaces of series in system of functions*, Mat. Stud., **59**, № 1, 46 – 59 (2023).

Одержано 15.10.23