О функции Грина самосопряженного эллиптического оператора, порожденного дифференциальным выражением и неоднородными граничными условиями

В. В. Барковский

В работе [1] обобщены результаты Уднова [2], введен эллиптический оператор, порожденный дифференциальным выражением и неоднородными граничными условиями. В настоящей заметке* рассматривается случай, когда этот оператор эрмитов. Доказывается, что ядро резольвенты (функция Грина) достаточно высокой степени самосопряженного расширения такого оператора будет гладким внутри области и на гладкой части границы. Этот результат существенен для построения разложений по собственным функциям указанного самосопряженного расширения.

1°. Будем рассматривать введенную в заметке [1] эллиптическую граничную задачу, порожденную дифференциальным выражением $\mathfrak{L}$ и граничными дифференциальными выражениями B_j. Ниже применяются обозначения заметки [1], в частности L^2 обозначает ортогональную сумму гильбертовых пространств $L^2 = \oplus \sum_{j=0}^{m} L_2(G^j)$, где $G^0 = G$ и $G^j = \Gamma$ при $j = 1, \ldots, m$.

Если коэффициенты $\mathfrak{L}$, B_j $(j = 1, \ldots, m)$ и поверхность Γ достаточно гладки, то справедлива формула Грина [3, 4]:

$$(\mathfrak{L}u, v) + \sum_{j=1}^{m} \langle B_j u, C_j v\rangle = (u, \mathfrak{L}^+ v) + \sum_{j=1}^{m} \langle C_j u, B'_j v\rangle \tag{1}$$

$$(u \in C_0^{2m}(G \cup \Gamma),\ v \in C^{2m}(\overline{G})).$$

Здесь $\{B'_j\}_{j=1}^m$, $\{C_j\}_{j=1}^m$, $\{C'_j\}_{j=1}^m$ — системы дифференциальных выражений порядков m'_j, l_j, l'_j $(l_j + m'_j = l'_j + m_j = 2m - 1)$, соответственно, причем $\{C_j\}_{j=1}^m$ и $\{C'_j\}_{j=1}^m$ дополняют $\{B_j\}_{j=1}^m$ и $\{B'_j\}_{j=1}^m$, соответственно, до системы Дирихле порядка $2m$. Будем говорить, что $\mathfrak{L}$ и $\{B_j\}_{j=1}^m$ формально самосопряженные, если $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}^+$, а $\{B'_j\}_{j=1}^m$ эквивалентна $\{B_j\}_{j=1}^m$ [3].

Лемма 1. *Пусть $\mathfrak{L}$ и $\{B_j\}_{j=1}^m$ формально самосопряженные, $a_\alpha(x) \in C^\infty(G \cup \Gamma)$, $b_{j\alpha}(x) \in C^\infty(\Gamma)$, Γ — поверхность класса C^{2m}, тогда справедливо равенство*:

$$(\mathfrak{L}u, v) + \sum_{j=1}^{m} \langle B_j u, C_j v\rangle = (u, \mathfrak{L}v) + \sum_{j=1}^{m} \langle C_j u, B_j v\rangle \tag{2}$$

* После того, как статья была закончена, автору стало известно о работе J. Ercolano и M. Schechter (Comm. Pure and Appl Math. 18, № 1—3, 1965), в которой авторы также обобщали работу Уднова [2] в подобном направлении.

$(u \in C_0^{2m}(G \bigcup \Gamma),\ v \in C^{2m}(\overline{G}))$, *где* $\{C_j\}_{j=1}^m$ — *некоторые определенным образом выбранные дифференциальные выражения порядка* $l_j = 2m - m_j - 1$, *дополняющие* $\{B_j\}_{j=1}^m$ *до системы Дирихле порядка* $2m$.

Действительно, из предположений леммы и работы [3] следует, что имеет место формула Грина (1) и представление

$$B_j' = \sum_{s=1}^{j} \Lambda_{js} B_s, \tag{3}$$

где Λ_{jj} — функция, $\neq 0$ при $m_j = m_j'$, а выражение Λ_{js} содержит только тангенциальные производные порядка не выше $m_j' - m_s$. Если $m_j' < m_s$, то $\Lambda_{js} = 0$. Из представления (3) следует:

$$\sum_{j=1}^{m} \langle C_j u, B_j' v\rangle = \sum_{j=1}^{m} \sum_{s=1}^{j} \langle C_j u, \Lambda_{js} B_s v\rangle = \sum_{s=1}^{m} \langle C_s^{*} u, B_s v\rangle,$$

где $C_s^{*} = \sum\limits_{j=s}^{m} \Lambda_{js}^{+} C_j$, Λ_{js}^{+} — формально сопряженное выражение. Поэтому формула Грина (1) может быть записана:

$$(\mathfrak{L}u, v) + \sum_{j=1}^{m} \langle B_j u, C_j' v\rangle = (u, \mathfrak{L}v) + \sum_{s=1}^{m} \langle C_s^{*} u, B_s v\rangle. \tag{4}$$

Аналогично получим

$$(\mathfrak{L}v, u) + \sum_{j=1}^{m} \langle B_j v, C_j' u\rangle = (v, \mathfrak{L}u) + \sum_{s=1}^{m} \langle C_s^{*} v, B_s u\rangle. \tag{5}$$

Обозначим $C_j = \frac{1}{2}[C_j' + C_j^{*}]$ (их коэффициенты — $c_{j\alpha}(x)$; тогда из (4) и (5) получаем равенство (2). Ясно, что исходные $\{C_j\}_{j=1}^m$ можно выбрать так, чтобы полученные старшие коэффициенты $c_{j\alpha}(x)$ не аннулировались. Тогда из $m_j = m_j'$ следует $l_j = l_j' = 2m - m_j - 1$, и лемма доказана.

В дальнейшем будем рассматривать $\mathfrak{L}$ и $\{B_j\}_{j=1}^m$, формально самосопряженные, а коэффициенты $a_\alpha(x) \in C^\infty(G \bigcup \Gamma)$, $b_{j\alpha}(x) \in C^\infty(\Gamma)$ $(j = 1, \ldots, m)$. Следуя [1], определим минимальный оператор A_0 как замыкание в L^2 оператора, действующего на функциях $u \in C_0^{2m}(G \bigcup \Gamma)$ по закону:

$$(u, C_1 u, \ldots, C_m u) \to (\mathfrak{L}u, B_1 u, \ldots, B_m u).$$

В нашем случае максимальным оператором A_0^{*} будет сопряженный к A_0 оператор. Из формулы Грина (2) непосредственно следует, что A_0 — симметрический оператор.

Ниже исследуем свойства регулярности функций из области определения степени минимального оператора $D(A_0^N)$ и области определения степени максимального оператора $D((A_0^{*})^N)$. Нетрудно установить следующие леммы.

Лемма 2. *Если* $\mathfrak{L}$ — *правильно эллиптическое дифференциальное выражение порядка* $2m$, *граничные дифференциальные выражения* B_j $(j = 1, \ldots, m)$ *нормальны и накрывают* $\mathfrak{L}$; *тогда для любого целого числа* $N \geqslant 1$ $\mathfrak{L}^N$ — *правильно эллиптическое дифференциальное выражение порядка* $2mN$, *граничные дифференциальные выражения* $\{B_j\mathfrak{L}^p\}_{j=1}^m$ $(p = 0, \ldots, N-1)$ *нормальны и накрывают* $\mathfrak{L}^N$, $\{C_j\mathfrak{L}^p\}_{j=1}^m$ *дополняют* $\{B_j\mathfrak{L}^p\}_{j=1}^m$ *до системы Дирихле порядка* $2mN$.

Лемма 3. *Чтобы* $(u, C_1u, \ldots, C_mu)$ $(u \in C_0^{2mN}(G \bigcup \Gamma))$ *принадлежал* $D(A_0^N)$, *для любого целого числа* $N \geqslant 1$ *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства*:

$$(B_j\mathfrak{L}^{p-1}u)(x) = (C_j\mathfrak{L}^p u)(x) \qquad (x \in \Gamma,\ j = 1, \ldots, m,\ p = 1, \ldots, N-1).$$

Для такой функции $u(x)$

$$A_0^N u = (\mathfrak{L}^N u,\ B_1\mathfrak{L}^{N-1}u, \ldots, B_m\mathfrak{L}^{N-1}u).$$

Лемма 4. *Для каждого положительного целого числа* $N \geqslant 1$ *множество* $(u, C_1u, \ldots, C_mu) \in D(A_0^N)$ $(u \in C_0^\infty(G \bigcup \Gamma))$ *образует плотное подмножество пространства* L^2.

Доказательство леммы проводится от противного. При этом пользуемся результатами лемм 2 и 3, а также теоремы 16.IV из [5].

Используя лемму 2 и повторяя рассуждения работы [1], нетрудно доказать, что имеет место

Лемма 5. *Предположим, что* $\Gamma = \dot{G}$. *Пусть* $U(x) = (u_0, \ldots, u_m) \in L^2$, $f_0 \in W_2^{-2mN}(G)$, $f_j \in W_2^{-[m_j+2m(N-1)]-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, $\quad 1 \leqslant j \leqslant m$, *такие, что выполняется равенство*

$$(u_0, \mathfrak{L}^N v) + \sum_{j=1}^m \langle u_j, B_j\mathfrak{L}^{N-1}v\rangle = (f_0, v_0) + \sum_{j=1}^m \langle f_j, C_jv\rangle$$
$$(v \in C^{2mN}(\overline{G})).$$

Если для целого и положительного s: $f_0 \in W_2^{-2mN+s}(G)$, $f_j \in W_2^{-[m_j+2m(N-1)]-\frac{1}{2}+s}(\Gamma)$, Γ — поверхность класса C^{2mN+s}, коэффициенты $a_\alpha(x) \in C^\infty(G \bigcup \Gamma)$, $b_{j\alpha}(x) \in C^\infty(\Gamma)$, $c_{j\alpha}(x) \in C^\infty(\Gamma)$ $(j = 1, \ldots, m)$, тогда

$$u_0(x) \in \widetilde{W}_2^s(G). \qquad u_j = C_ju \in W_2^{s-l_j-\frac{1}{2}}(\Gamma),$$

$\widetilde{W}_2$ означает замыкание множества достаточно гладких функций по норме $|||u|||_s = \|u\|_s + \sum_{k=1}^{2mN}\left\|\frac{\partial^{k-1}}{\partial \nu^{k-1}}u,\ \Gamma\right\|_{s-k+\frac{1}{2}}$ (см. [6]), $\widetilde{W}_{2,\text{лок}}$ определяется так же, как в [1].

Теорема 1. *Пусть* $U(x) = (u_0, \ldots, u_m) \in D(A_0^N)$, Γ — *класса* $C^{4mN-2m+\min\limits_j m_j}$, $a_\alpha(x) \in C^\infty(G \bigcup \Gamma)$, $b_{j\alpha}(x) \in C^\infty(\Gamma)$, $c_{j\alpha}(x) \in C^\infty(\Gamma)$, $j = 1, \ldots, m$. *Тогда*: 1) $u_0(x) \in W_2^{2mN}(G_1)$, *если* $\overline{G}_1 \subset G$; 2) $u_0(x) \in \widetilde{W}_{2,\text{лок}}^{\min\limits_j m_j+2m(N-1)}(G, \Gamma)$, $u_j = C_ju_0(x) \in W_2^{\min\limits_j m_j+2m(N-1)-l_j-\frac{1}{2}}(\Gamma_0)$, *где* Γ_0 — *общая граница с* G *подобласти* G_0, $\overline{\Gamma}_0 \subset \Gamma$; 3) *если граница подобласти* $G_2 \subset G$ *пересекается с* G *лишь по достаточно гладкому куску* γ, *содержащему* Γ *как строго внутреннюю подобласть, то*

$$u_0(x) \in \widetilde{W}_{2,\text{лок}}^{\min\limits_j m_j+2m(N-1)}(G_2, \gamma), \qquad u_j = C_ju_0(x) \in W_2^{\min\limits_j m_j+2m(N-1)-l_j-\frac{1}{2}}(\Gamma),$$

$$D^\alpha u_0(x)|_{\gamma\setminus\Gamma} = 0 \qquad (|\alpha| \leqslant \min_j m_j + 2m(N-1) - 1).$$

Теорема 2. *Пусть* $U(x) = (u_0, u_1, \ldots, u_m) \in D((A_0^*)^N)$ *и выполнены условия теоремы* 1, *тогда*: 1) $U_0(x) \in W_2^{2mN}(G_1)$, *если* $\overline{G}_1 \subset G$; 2) $U_0(x) \in$

$\in \widetilde{W}_{2,\text{лок}}^{\min m_j+2m(N-1)}(G,\Gamma)$, $u_j = C_j U_0(x) \in W_2^{\min m_j+2m(N-1)-l_j-\frac{1}{2}}(\Gamma_0)$, *где* Γ_0 *является общей границей с* G *подобласти* G_0, $\overline{\Gamma}_0 \subset \Gamma$.

Следствие 1. *Для достаточно большого* N *в силу теорем вложения С. Л. Соболева, леммы* 2 *и теоремы* 16 IV *из* [5] *нетрудно показать, что элементы из* $\bigcap\limits_{N \geq 0} D((A_0^*)^N)$ *локально удовлетворяют условиям*

$$(B_j \mathfrak{L}^p u)(x) = (C_j \mathfrak{L}^{p+1} u)(x), \qquad x \in \Gamma, \quad j = 1, \dots, m.$$

для всех $p \geq 0$.

2°. Рассмотрим теорему об обобщенном ядре в L^2. Пусть $L^2 = H_0$, $H_+ = \oplus \sum\limits_{j=0}^{m} W_2^{s_j}(G^j)$, $\quad H_- = \oplus \sum\limits_{j=0}^{m} W_2^{-s_j}(G^j)$ $(s_j\ (j = 0, \dots, m)$ — целые положительные числа). Ясно, что $H_- \supseteq H_0 \supseteq H_+$ — цепочка пространств с инволюцией, определенной посредством перехода к комплексной черте. Известно, что при $s_0 > \left[\dfrac{n}{2}\right]$ вложение $W_2^{s_0}(G^0) \to L_2(G^0)$ квазиядерно (т. е. Гильберта — Шмидта); аналогичное имеет место при $s_j > \left[\dfrac{n-1}{2}\right]$ для вложений $W_2^{s_j}(G^j) \to L_2(G^j)$ $\quad (j = 1, \dots, m)$ (см. [7]).

Рассмотрим оператор S, непрерывно действующий в $L^2 = H_0$. Пусть $\min s_j \geq \left[\dfrac{n-1}{2}\right] + 1$ $\quad (1 \leq j \leq m)$, тогда $s_0 = s_j + l_j + 1 > \left[\dfrac{n}{2}\right]$ и вложение $H_+ \to H_0$ квазиядерно. Поэтому к билинейной форме $B(U, V) = (SU, V)_0$ $(U, V \in L^2 = H_0)$ можно применить теорему о ядре (см. § 2, 3, гл. 1 [7]) и получить

$$(SU, V)_0 = \sum_{i,j=0}^{m} (\Phi_{ij}(x_i, y_j), v_i(x_i)\overline{u_j(y_j)})_{L_2(G^i \times G^j)} \qquad (U, V \in H_+),$$

где

$$\Phi_{ij}(x_i, y_j) \in W_2^{-s_i}(G^i) \otimes W_2^{-s_j}(G^j) \qquad (i, j = 0, \dots, m).$$

Отсюда можно получить, что

$$(SU)_i(x_i) = \int\limits_G \Phi_{i0}(x_i, y_0)\, u_0(y_0)\, dy_0 + \sum_{j=1}^{m} \int\limits_\Gamma \Phi_{ij}(x_i, y_j)\, u_j(y_j)\, dy_j \tag{6}$$

$$(U = (u_0, \dots, u_m) \in L^2).$$

3°. Пусть симметрический оператор A_0 имеет равные дефектные числа (например, коэффициенты выражений $\mathfrak{L}$ и B_j $(j = 1, \dots, m)$ вещественны); тогда в пространстве L^2 существует самосопряженное расширение A оператора A_0. Ясно, что в этом случае A^N будет самосопряженным расширением в L^2 оператора A_0^N $(N > 1)$. Легко показать, что имеет место

Лемма 6. *Пусть* Γ *класса* $C^{4mN-2m+\min m_j}$, z — *регулярная точка* A, $F = (f_0, \dots, f_m) \in L^2$. *Тогда* $((A^N - zE)^{-1}F)(x)$ *будет слабым обобщенным решением задачи:*

$$(\mathfrak{L}^N u)(x_0) - zu(x_0) = f_0(x_0) \qquad (x_0 \in G),$$

$$(B_j \mathfrak{L}^{N-1} u)(x_j) - z(C_j u)(x_j) = f_j(x_j), \qquad (B_j \mathfrak{L}^{p-1} u)(x_j) = (C_j \mathfrak{L}^p u)(x_j), \tag{7}$$

$$x_j \in \Gamma, \qquad 1 \leq j \leq m, \qquad p = 1, \dots, N-1.$$

Функцией Грина $\Phi^{(N)}(x, y; z) = (\Phi_{ij}^{(N)}(x_i, y_j; z))_{i,j=0}^m$ самосопряженного оператора A^N $(N = 1, 2, \ldots)$ называется ядро резольвенты $(A^N - zE)^{-1}$. В силу сказанного в пункте 2^0 функция Грина всегда существует, однако является обобщенным ядром. При N достаточно большом она будет обычным ядром, точнее, справедлива

Теорема 3. *Пусть* $N \geqslant \left| \frac{n+1}{4m} - \min_i m_i/m \right| + 2$, Γ *класса* $C^{4mN-2m+\min_i m_i}$, z — *регулярная точка оператора* A. *Тогда функция Грина* $\Phi^{(N)}(x, y, z)$ *обладает следующими свойствами:*

если G_0 — *подобласть области* G, *примыкающая к* Γ *лишь по* Γ_0, $\overline{\Gamma}_0 \subset \Gamma$, *то*

1. *Для любого фиксированного* $x_i \in G_0 \cup \Gamma_0$ $(y_j \in G_0 \cup \Gamma_0)$

$$\Phi_{i0}^{(N)}(x_i, \cdot, z) \in W_{2,\text{лок}}^{s_0}(G_0 \setminus \{x_i\}), \quad \Phi_{ij}^{(N)}(x_i, \cdot, z) \in W_{2,\text{лок}}^{s_j}(\Gamma_0 \setminus \{x_i\})$$

$$(0 \leqslant i \leqslant m, \ 1 \leqslant j \leqslant m),$$

$$(\Phi_{0j}^{(N)}(\cdot, y_j, z) \in W_{2,\text{лок}}^{s_0}(G_0 \setminus \{y_j\}), \quad \Phi_{ij}^{(N)}(\cdot, y_j, z) \in W_{2,\text{лок}}^{s_j}(\Gamma_0 \setminus \{y_j\})) \tag{8}$$

$$(0 \leqslant j \leqslant m, \ 1 \leqslant i \leqslant m), \quad s_0 = \min m_i + 2m(N-1), \ s_i = s_0 - l_i - \frac{1}{2}.$$

2. $\Phi^{(N)}(x_i, \cdot, z)$ $(\Phi^{(N)}(\cdot, y_j, z)$ *внутри* $G_0 \setminus \{x_i\} \cup \Gamma_0 \setminus \{x_i\}$ $(G_0 \setminus \{y_j\} \cup \cup \Gamma_0 \setminus \{y_j\})$ *удовлетворяет соотношениям*

$$(\Phi_{i\cdot}^{(N)}(x_i, \cdot, z), \overline{(A^N - zE)V})_0 = 0 \quad (0 \leqslant i \leqslant m), \ V = (v, C_1 v, \ldots, C_m v) \in \overline{D(A^N)},$$

$$((\Phi_{\cdot j}^{(N)}(\cdot, y_j, z), (A^N - zE^+V)_0 = 0, \quad 0 \leqslant j \leqslant m,$$

$$V = (v, C_1 v, \ldots, C_m v) \in D(A^N)). \tag{9}$$

3. *При фиксированном* $x_0 \in G_0$ $\Phi_{0k}^{(N)}(x_0, \cdot, z)$ $(0 \leqslant k \leqslant m)$ *на функциях* $U(x) = (u, C_1 u, \ldots, C_m u) \in D(A^N)$ *удовлетворяет задаче:*

$$(\mathfrak{L}^N u)(y_0) - zu(y_0) = \delta_x, \quad y_0 \in G_0, \quad x_0 \neq y_0, \tag{10}$$

$$(B_j \mathfrak{L}^{N-1} u)(y_j) = z(C_j u)(y_j), \qquad (B_j \mathfrak{L}^{p-1} u)(y_j) = (C_j \mathfrak{L}^p u)(y_j),$$

$$y_j \in \Gamma_0, \qquad 1 \leqslant j \leqslant m, \quad p = 1, \ldots, N-1$$

При фиксированном $x_i \in \Gamma_0$ $\Phi_{ik}^{(N)}(x_i, \cdot, z)$ $(1 \leqslant i \leqslant m, \ 0 \leqslant k \leqslant m)$ на тех же функциях $U(x)$ удовлетворяет задаче:

$$(\mathfrak{L}^N u)(y_0) = zu(y_0), \qquad y_0 \in G_0, \tag{11}$$

$$(B_j \mathfrak{L}^{N-1} u)(y_j) - z(C_j u)(y_j) = \delta_{j,x_j}, \qquad (B_j \mathfrak{L}^{p-1} u)(y_j) = (C_j \mathfrak{L}^p u)(y_j),$$

$$y_j \in \Gamma_0, \quad y_j \neq x_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant m, \quad p = 1, \ldots, N-1$$

(для фиксированного $y_0 \in G_0$ или $y_j \in \Gamma_0$ справедливы равенства (10) и (11) по x_i $(0 \leqslant i \leqslant m)$ на $U(x) = (u, C_1 u, \ldots, C_m u) \in D(A^N)$; надо лишь δ_{x_0} и δ_{i,x_i} заменить на δ_{y_0} и δ_{j,y_j}, соответственно).

Отметим, что каждая строка матрицы $(\Phi_{ij}^{(N)}(x_i, y_j, z))_{i,j=0}^m$, рассматриваемая как вектор-функция, при $|x_0 - y_0| \in G_0$ или при $|x_i - y_j| \in \Gamma_0$ достаточно малом имеет особенность фундаментального решения задач (10) или (11), соответственно.

Доказательство теоремы является развитием подхода п. 5, § 5, гл. 3 из [7]. При доказательстве используется

Лемма 7. *Пусть выполнены предположения теоремы 2, R — непрерывно действующий в L^2 оператор такой, что RF при любом $F \in L^2$ является слабым обобщенным решением задачи*

$$
\begin{gathered}
(\mathfrak{L}^{\mathrm{N}} u)(x_0) = f_0(x_0), \qquad x_0 \in G, \qquad (12)\\
(B_j \mathfrak{L}^{\mathrm{N}-1} u)(x_j) = f_j(x_j), \qquad (B_j \mathfrak{L}^{p-1} u)(x_j) = (C_j \mathfrak{L}^{p} u)(x_j),\\
x_j \in \Gamma, \qquad 1 \leqslant j \leqslant m, \qquad p = 1, \ldots, \mathrm{N}-1.
\end{gathered}
$$

Тогда справедливы оценки:

$$
\begin{gathered}
\| (RF)_0(x_0) \|_{W_2^{s_0}(G_0)} \leqslant c_{(G_0 \cup \Gamma_0)} \| F \|_0, \qquad x_0 \in G_0,\\
\ll (RF)_i(x_i) \gg_{W_2^{s_i}(\Gamma_0)} \leqslant c_{(G_0 \cup \Gamma_0)} \| F \|_0, \qquad x_i \in \Gamma_0, \qquad 1 \leqslant i \leqslant m.
\end{gathered} \qquad (13)
$$

Доказательство леммы получается непосредственно из теоремы 2 и замкнутости отображения

$$
F = (f_0, f_1, \ldots, f_m) \to (RF)(x) = ((RF)_0(x_0), \ldots, (RF)_m(x_m)),
$$

определенного на векторах полного пространства L^2 и действующего в $W_2^{s_0}(G_0) \oplus \sum_{i=1}^{m} W_2^{s_i}(\Gamma_0)$.

Наметим доказательство теоремы. Условия теоремы 2, лемм 6 и 7 выполнены, поэтому $((A^{\mathrm{N}} - zE)^{-1} F)(x)$ будет слабым обобщенным решением задачи $(A^{\mathrm{N}} - zE) U = F$. Согласно теореме 2 и теоремам вложения С. Л. Соболева получаем:

$$
\begin{gathered}
| ((\mathfrak{L}^{\mathrm{N}} - zE)^{-1} f_0)(x_0) | \leqslant c \, \| ((\mathfrak{L}^{\mathrm{N}} - zE)^{-1} f_0)(x_0) \|_{W_2^{s_0}(G_0)}, \qquad x_0 \in G_0,\\
| (C_j (B_j \mathfrak{L}^{\mathrm{N}-1} - zC_j)^{-1} f_j)(x_j) | \leqslant c_1 \ll C_j (B_j \mathfrak{L}^{\mathrm{N}-1} - zC_j)^{-1} f_j)(x_j) \gg_{W_2^{s_j}(\Gamma_0)},\\
x_j \in \Gamma_0, \qquad 1 \leqslant j \leqslant m.
\end{gathered} \qquad (14)
$$

Рассмотрим на $F \in L^2$ однородные и аддитивные функционалы $l_{x_0}^0(F) = ((A^{\mathrm{N}} - zE)^{-1} F)_0(x_0)$, $x_0 \in G_0$; $l_{x_i}^i(F) = ((A^{\mathrm{N}} - zE)^{-1} F)_i(x_i)$, $x_i \in \Gamma_0$, $1 \leqslant i \leqslant m$.

Из (14) и (13) следует, что эти функционалы непрерывны, поэтому при $x_0 \in G_0$ существует вектор-функция $\mathcal{H}_{x_0}^0 = (\eta_{x_0}^0, \eta_{1,x_1}^0, \ldots, \eta_{m,x_m}^0) \in \oplus \sum_{i=0}^{m} L_2(G_0^i)$, а при $x_i \in \Gamma_0$ существуют вектор-функции $\mathcal{H}_{x_i}^i = (\eta_{x_0}^i, \ldots, \eta_{m,x_m}^i) \in \oplus \sum_{k=0}^{m} L_2(G_0^k)$, $1 \leqslant i \leqslant m$, такие что

$$
\begin{gathered}
l_{x_0}^0(F) = \overline{(\mathcal{H}_{x_0}^0, F)_0} = \overline{(\eta_{x_0}^0, f_0)} + \sum_{i=1}^{m} \overline{\langle \eta_{i,x_i}^0, f_i \rangle}, \qquad x_0 \in G_0,\\
l_{x_i}^i(F) = \overline{(\mathcal{H}_{x_i}^i, F)_0} = \overline{(\eta_{x_0}^i, f_0)} + \sum_{j=1}^{m} \overline{\langle \eta_{j,x_j}^i, f_j \rangle}, \qquad x_i \in \Gamma_0.
\end{gathered} \qquad (15)
$$

Пусть $V(x)=(v, C_1v, \ldots, C_mv)\in D(A^{\mathrm N})$; $v\in W_2^{2mN}(G\bigcup\Gamma)$ дополнительно аннулируются в окрестностях множества $\bar G\setminus(G_0\bigcup\Gamma_0)$ и в фиксированной точке x_i из $G_0\bigcup\Gamma_0$ $(0\leqslant i\leqslant m)$; тогда, полагая в (15) $F=(A^{\mathrm N}-zE)V(x)$, получим

$$(\mathscr{H}^0_{x_0}, ((A^{\mathrm N}-zE)V)(x_0))_0=V(x)=(v(x_0), C_1v(x_1), \ldots, C_mv(x_m))=0,$$
$$x_0\in G_0; \tag{16}$$
$$(\mathscr{H}^i_{x_i}, ((A^{\mathrm N}-zE)V)(x_i))_0=V(x)=(v(x_0), C_1v(x_1), \ldots, C_mv(x_m))=0,$$
$$x_i\in\Gamma_0, \qquad 1\leqslant i\leqslant m.$$

Отсюда следуют равенства (10), (11) и то, что $\mathscr{H}^i_{x_i}$ $(0\leqslant i\leqslant m)$ являются слабыми обобщенными решениями внутри $G_0\setminus\{x_i\}\bigcup\Gamma_0\setminus\{x_i\}$ задачи

$$(\mathfrak{L}^{\mathrm N}u)(y_0)-zu(y_0)=0, \qquad y_0\in G, \qquad x_0\neq y_0,$$
$$(B_j\mathfrak{L}^{\mathrm N-1}u)(y_j)-\bar z(C_ju)(y_j)=0, \qquad (B_j\mathfrak{L}^{p-1}u)(y_j)=(C_j\mathfrak{L}^pu)(y_j),$$
$$y_j\in\Gamma, \qquad x_k\neq y_j, \qquad 1\leqslant k\leqslant m, \qquad p=1, \ldots, \mathrm N-1. \tag{17}$$

Обозначим G_0' подобласть области $G_0\setminus\{x_0\}$, имеющую общую границу с Γ_0 лишь по Γ_0', причем $\bar\Gamma_0'\subset\Gamma_0\setminus\{x_k\}$ $(1\leqslant k\leqslant m)$. Тогда из теоремы 2 и равенств (17) следует, что $\eta^i_{x_i}\in W^{s_0}_{2,\text{лок}}(G_0\setminus\{x_0\})$, $\eta^i_{j,x_j}=C_j\eta^i_{x_0}\in W^{s_j}_2(\Gamma_0')$, $0\leqslant i\leqslant m$, $1\leqslant j\leqslant m$. Иными словами, в $G_0'\bigcup\Gamma_0'$ для каждого фиксированного $x_i\in G_0\bigcup\Gamma_0$ найдется матрица $H_{x_i}(y_j)$ $(x_i\neq y_j, y_j\in G_0\bigcup\Gamma_0,\ 0\leqslant i, j\leqslant m)$ такая, что $(\mathscr{H}_{x_i}U)_0=(H_{x_i}, U)_0$ для всех $U(x_i)\in\oplus\sum\limits_{i=0}^{m}L_2(G_0^i)$, аннулирующихся в окрестностях множества $\bar G\setminus(G_0'\bigcup\Gamma_0')$. В силу (6) и (15) для указанных $U(x_i)$ получим:

$$\sum_{j=0}^{m}\int\limits_{G^j}\Phi^{(\mathrm N)}_{ij}(x_i, y_j, z)\,u_j(y_j)\,dy_j=((A^{\mathrm N}-zE)^{-1}F)_i(x_i)=$$
$$=\sum_{j=0}^{m}\int\limits_{G^j}\overline{h^i_{x_i}(y_j)}\,u_j(y_j)\,dy_j, \qquad 0\leqslant i\leqslant m. \tag{18}$$

Отсюда следует, что при $y\in G_0'\bigcup\Gamma_0'$, $\Phi^{(\mathrm N)}(x, \cdot, z)=\overline{H_{x_i}(y)}$ $(0\leqslant i\leqslant m)$, что и доказывает первое соотношение (8), так как G_0' имеет общую границу с G_0 лишь по Γ_0' и сколь угодно точно аппроксимирует $G_0\setminus\{x_0\}$. Первое из равенств (9) вытекает из $\Phi^{(\mathrm N)}(x, \cdot, z)=H_{x_i}(\cdot)=\mathscr{H}_{x_i}(\cdot)$ и равенств (16). Таким образом,

$$\overline{(\Phi^{(\mathrm N)}(x_i, \cdot, z)}, ((A^{\mathrm N}-zE)W)(x))_0=(\Phi^{(\mathrm N)}(x_i, \cdot, z), \overline{((A^{\mathrm N}-zE)W)(x))_0}=0$$
$$(0\leqslant i\leqslant m)$$

для $W(x)=(w, C_1w, \ldots, C_mw)\in D(A^N)$, $w(x)\in W_2^{2mN}(G\bigcup\Gamma)$, аннулирующихся в окрестностях точки x_i и $\bar G\setminus(G_0\bigcup\Gamma_0)$. Приближая такими $\bar W(x)$ функции $V(x)$ из (9), придем к требуемому. Утверждения теоремы о $\Phi^{(\mathrm N)}(x, y, z)$ как функции от x устанавливаются аналогично. Теорема доказана.

Следствие 2. *Оператор A — карлемановский в следующем смысле:*

почти при каждом $y_j \in G_0 \bigcup \Gamma_0$ $(0 \leqslant j \leqslant m)$

$$\sum_{i=0}^{m} \int_{G^i} |\Phi_{ij}^{(N)}(x_i, y_j, z)|^2 dx_i < \infty.$$

Повторяя рассуждения [7] (см. гл. 5, § 4), можно доказать теорему о разложении по собственным функциям этого оператора.

Автор выражает глубокую благодарность Ю. М. Березанскому за оказанную помощь при выполнении этой работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Барковский, Я. А. Ройтберг, О минимальном и максимальном операторах, соответствующих общей эллиптической задаче с неоднородными граничными условиями, Настоящий номер.
2. J. Odnoff, Operators generated by differential problems with value parameter in equation and boundary condition, Lund, 1959.
3. M. Schechter, General boundary value problems for elliptic partial differential equations, Comm. Pure and Appl. Math., 12, N 3, 1959, 457—486 (Русск. перевод: Сб. переводов, Математика, 4, 5, 1960, 93—122).
4. J. L. Lions, E. Magenes, Problemi ai limiti non omogenei (III, V), Ann Della Scuola Normale Super. di Pisa, Ser. III, 15, N 1, 2, 1961, 39—101; 16, N 1, 1962, 1—44.
5. К. Миранда, Уравнения с частными производными эллиптического типа, ИЛ, М., 1957.
6. Я. А. Ройтберг, ДАН СССР, т. 157, № 4, 1964.
7. Ю. М. Березанский, Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, Изд-во «Наукова Думка», К., 1965.

Поступила 7. XII 1965 г
Киев