УДК 517.9

С. М. Торба (Ін-т математики НАН України, Київ),
О. І. Кашпіровський (Нац. ун-т „Києво-Могилянська академія”)

ХАРАКТЕРИЗАЦІЯ ШВИДКОСТІ ЗБІЖНОСТІ ОДНОГО НАБЛИЖЕНОГО МЕТОДУ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ АБСТРАКТНОЇ ЗАДАЧІ КОШІ*

The method of approximate solution based on the exponent decomposition into orthogonal Lager polynomials is considered for the Cauchy problem for an operator differential equation. It is proved that the belonging of an initial value to some space of smooth elements of the operator A is equivalent to the convergence of some weighted sum of integral residuals. As a corollary, direct and inverse theorems of the theory of approximation in the mean are obtained.

Рассмотрен приближенный метод решения задачи Коши для дифференциально-операторного уравнения, основанный на разложении экспоненты по ортогональным многочленам Лагерра. Доказано, что принадлежность начального значения определенному пространству гладких элементов оператора A эквивалентна сходимости некоторой взвешенной суммы интегральных невязок. Как следствие, получены прямые и обратные теоремы теории приближения в среднем.

1. Вступ. У сепарабельному гільбертовому просторі $\mathfrak{H}$ розглядається задача Коші для операторно-диференціального рівняння першого порядку

$$x' + Ax = f(t), \qquad x(0) = x_0, \tag{1}$$

де $x = x(t)$ та $f(t)$ — відповідно невідома та відома $\mathfrak{H}$-значні функції, $0 \le t < \infty$, A — самоспряжений додатний оператор в $\mathfrak{H}$. Наприклад, якщо $\mathfrak{H} = L_2(-\pi, \pi)$, A — самоспряжений оператор, породжений диференціальним виразом $-\dfrac{d^2}{dt^2}$ з періодичними крайовими умовами $u(-\pi) = u(\pi)$, $u'(-\pi) = u'(\pi)$, то рівняння (1) переходить у відоме рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t). \tag{2}$$

Вивчення рівняння (1) дає змогу з єдиної точки зору досліджувати абстрактні рівняння параболічного типу, які є узагальненням рівняння (2).

Як відомо [1], розв'язок задачі Коші допускає зображення

$$x(t) = U(t)x_0 + \int_0^t U(t-s) f(s)\, ds, \tag{3}$$

де

$$U(t) = e^{-At} = \int_0^\infty e^{-t\lambda}\, dE_\lambda \tag{4}$$

— півгрупа операторів, породжена оператором A, E_λ — спектральний розклад оператора A. Оскільки спектральний розклад E_λ, як правило, невідомий, то природно виникає задача побудови наближень півгрупи $U(t)$, а отже, і розв'язків рівняння (1).

Один із підходів до наближень операторної експоненти полягає у розкладі функції (див. [2, с. 225])

$$e^{-at} = \frac{1}{(a+1)^{\alpha+1}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{a+1}\right)^n L_n(t, \alpha), \quad a > -1/2, \tag{5}$$

* Частково підтримано Державним фондом фундаментальних досліджень України (проект № 14.1/003).

у ряд за ортогональними многочленами Лагерра

$$L_n(t,\alpha) = \frac{1}{n!}t^{-\alpha} e^t\left(t^{\alpha+n} e^{-t}\right)^{(n)}$$

і формальній заміні у виразі (5) параметра a чи t на оператор A. Часткові суми отриманого формального виразу досліджуються як наближення операторної експоненти.

В роботі М. Л. Горбачука і В. В. Городецького [3] для наближення півгрупи $U(t)$ у виразі (5) оператором A замінено параметр t. В якості наближень розглядаються часткові суми

$$P_N(t,A) = \frac{1}{t+1}\sum_{k=0}^{N}\left(\frac{t}{t+1}\right)^n L_n(A,0).$$

При цьому послідовність $P_N(t,A)$ збігається до $U(t)$ не для всіх векторів $f \in \mathfrak{H}$, а тільки для деяких C^∞-векторів оператора A. Для таких векторів метод наближення має експоненціальну швидкість збіжності. Суттєвий недолік таких наближень пов'язаний з використанням степенів від необмеженого оператора A, що приводить до нестійкості відповідних чисельних методів.

У роботах Д. З. Арова, І. П. Гаврилюка, В. Л. Макарова, В. Б. Василика та В. Л. Рябічева [4 – 6] та в монографії [7] в якості наближення розглядається

$$x_N(t) = e^{-\gamma t}\sum_{k=0}^{N}(-1)^k L_k(2\gamma t,0)T_\gamma^k(I+T_\gamma)x_0, \tag{6}$$

де γ — довільна додатна стала, T_γ — дробово-раціональна функція від оператора A,

$$T_\gamma = T(\gamma,A) = \frac{\gamma-A}{\gamma+A}, \quad \gamma>0,$$

яка називається перетворенням Келі оператора A, або когенератором групи $U(t)$. Наближення (6) є поліноміальним відносно t та T_γ і може бути отримане з модифікації виразу (5) заміною параметра a на A. Наближення (6) збігається для всіх векторів $x \in \mathfrak{H}$ і для $x_0 \in \mathcal{D}(A^\sigma)$, $\sigma>0$, має степеневий характер швидкості прямування до нуля відхилу [7]: рівномірно для $t \in (0,\infty)$ $\|x_N(t) - x(t)\| \le cN^{-\sigma}$ та на довільному проміжку $[p,q] \subset (0,\infty)$ $\|x_N(t) - x(t)\| \le c_{p,q}N^{-\sigma-1/4}$.

У роботі [8] запропоновано інший підхід до наближення півгрупи $U(t) = e^{-tA}$, $A \ge I$, в якому використовується розвинення функції $e^{t/\lambda}$, $\lambda \in (0,1]$, в ряд Фур'є – Чебишова

$$e^{-\frac{t}{\lambda}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t)T_n^*(\lambda), \tag{7}$$

де $T_n^*(\lambda)$ — зміщені поліноми Чебишова [9]. Наближення отримується формальною підстановкою A^{-1} замість λ в часткові суми ряду (7). При $t>0$ для відповідних розв'язків однорідного рівняння встановлено експоненціальну оцінку

$$\|y(t) - y_N(t)\| \le C\exp\left(-\delta\sqrt[3]{tN^2}\right)\|x_0\|.$$

Розклад за зміщеними поліномами Якобі для $x_0 \in \mathcal{D}(A^\sigma)$, $\sigma>0$, дозволив покращити останню оцінку при малих t [10]:

$$\| y(t) - y_N(t) \| \leq CN^{-2\sigma - 1/2} \ln N \exp\left(-\delta \sqrt[3]{tN^2} \right) \| A^{\sigma} x_0 \|.$$

Хоча останні дві оцінки є кращими, ніж оцінки для наближень (6), для них характерним є насичення для малих $t > 0$. Водночас наближення (6) є ненасиченим.

У роботі [11] розглянуто підхід, подібний до (6), і встановлено прямі та обернені теореми для зв'язку швидкості прямування до нуля інтегрального відхилу наближеного розв'язку з гладкістю початкового вектора x_0. Мета даної роботи полягає у встановленні критерію зв'язків між швидкістю прямування до нуля інтегрального відхилу наближеного розв'язку та гладкістю початкового вектора, зокрема — характеризації належності x_0 до $\mathcal{D}(A^{\sigma})$, $\sigma > 0$, у термінах швидкості прямування до нуля інтегрального відхилу наближення $e^{-tA} x_0$.

2. Основні результати. Нехай A — самоспряжений додатно визначений оператор, що діє в гільбертовому просторі $\mathfrak{H}$. Для оператора A розглядається однорідна задача Коші

$$x'(t) + Ax(t) = 0, \qquad t > 0, \qquad x(0) = x_0, \tag{8}$$

розв'язок якої [1] має вигляд

$$x(t) = e^{-tA} x_0.$$

Як це було зроблено в [11], за допомогою розкладу функції e^{-at} в ряд за многочленами Лагерра [2, с. 225] записується формальний вираз для операторної експоненти

$$e^{-At} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n (A + I)^{-(n+1)} L_n(t, 0), \tag{9}$$

що діє в $\mathfrak{H}$. Нагадаємо, що ряд (9) при $t > 0$ збігається для всіх $x \in \mathfrak{H}$, а при $t = 0$ достатньою умовою збіжності є $x \in \mathcal{D}(A^{\sigma})$, $\sigma > 0$. Розглянемо точний розв'язок

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A^n (A + I)^{-(n+1)} L_n(t, 0) x_0 \tag{10}$$

і в якості наближення використаємо часткову суму ряду (10)

$$x_N(t) = \sum_{n=0}^{N} A^n (A + I)^{-(n+1)} L_n(t, 0) x_0. \tag{11}$$

Вираз (11) можна інтерпретувати так: розглядається послідовність стаціонарних задач

$$(A + I) y_{p+1} = A y_p, \quad p = 0, 1, \ldots, \quad y_0 = (A + I)^{-1} x_0,$$

завдяки чому нестаціонарне рівняння (8) „дискретизується" і зводиться до послідовності стаціонарних рівнянь з незмінними правою та лівою частинами, і по цих рівняннях виписується наближений розв'язок

$$x_N(t) = \sum_{n=0}^{N} L_n(t, 0) y_n.$$

Многочлени Лагерра $L_n(t, 0)$ є ортонормованими на $(0, \infty)$ з вагою e^{-t}, тому має сенс розглянути інтегральний відхил наближеного розв'язку

$$z_N^2 = \int_0^\infty \| x(t) - x_N(t) \|^2 e^{-t}\, dt. \tag{12}$$

У роботі [11] отримано прямі та обернені теореми для швидкості прямування z_N^2 до нуля в залежності від гладкості x_0. Ми покращимо ці результати, зокрема критерій належності x_0 до $\mathcal{D}(A^\sigma)$.

Результати роботи [11] показують, що з експоненціальної швидкості прямування до нуля z_N^2 випливає належність x_0 до множини цілих векторів експоненціального типу. Розглянемо субекспоненціальний випадок.

Нехай задано монотонно зростаючу послідовність додатних дійсних чисел $\{m_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ таку, що

$$\lim_{n\to\infty} \frac{m_n}{e^{\delta n}} = 0 \quad \forall \delta > 0.$$

Для характеризації векторів x_0, для яких $z_n^2 = o\left(\frac{1}{m_n}\right)$, розглянемо дві функції. Перша визначається за допомогою Z-перетворення [12]

$$G_1^2(\lambda) = \frac{1}{2\lambda+1}\mathcal{Z}\{m_n\}\left(\left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)^2\right) = \frac{1}{2\lambda+1}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)^{2n}\cdot m_n. \tag{13}$$

Для визначення другої розглянемо деяку функцію $g(\xi)$, яка є неперервною, монотонно зростає і $g(\xi) = m_n$ при $\xi = n$, $n \in \mathbb{N}$. Нехай

$$G_2^2(\lambda) = \frac{1}{2\lambda+1}\mathcal{L}\{g\}\left(2\ln\frac{\lambda+1}{\lambda}\right) = \frac{1}{2\lambda+1}\int_0^\infty g(\xi)\left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)^{2\xi} d\xi, \tag{14}$$

де $\mathcal{L}\{g\}$ — перетворення Лапласа від функції $g(\xi)$.

Тоді справедливою є така теорема.

Теорема 1. $x_0 \in \mathcal{D}(G(A))$, *де* $G(\cdot)$ — *одна з функцій* (13), (14), *тоді і тільки тоді*, *коли ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n^2 \cdot m_n \tag{15}$$

збігається.

Доведення. Відмітимо, що з (13), (14), монотонності послідовності $\{m_n\}$ та функції $g(\xi)$ випливає, що

$$\left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)^2 G_1^2(\lambda) \le G_2^2(\lambda) \le \left(\frac{\lambda+1}{\lambda}\right)^2 G_1^2(\lambda). \tag{16}$$

При $0 \le \lambda \le 1$ функції $G_1^2(\lambda)$ та $G_2^2(\lambda)$ є обмеженими, а при $\lambda \ge 1$ з (16) випливає $\frac{1}{4}G_1^2(\lambda) \le G_2^2(\lambda) \le 4\,G_1^2(\lambda)$, отже, належність x_0 до $\mathcal{D}(G_1(A))$ еквівалентна належності x_0 до $\mathcal{D}(G_2(A))$.

Нехай $x_0 \in \mathcal{D}(G_1(A))$. Тоді завдяки ортонормованості многочленів $L_n(t,0)$ з вагою e^{-t} має місце зображення (див. [11])

$$z_N^2 = \int_0^\infty \left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)^{2N+2} \frac{1}{G_1^2(\lambda)}\frac{1}{2\lambda+1}\, d(E_\lambda y_0, y_0), \tag{17}$$

де $y_0 = G_1(A)x_0$. Позначимо підінтегральний вираз через $\phi_N(\lambda)$.

Покажемо обмеженість часткових сум ряду (15). Для цього розглянемо

$$\sum_{n=1}^{N} z_n^2 \cdot m_n \;=\; \sum_{n=1}^{N} m_n \int_0^\infty \phi_n(\lambda)\, d(E_\lambda y_0, y_0) \;=$$

$$= \int_0^\infty \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)^{2n+2} \frac{m_n}{2\lambda+1} \frac{1}{G_1^2(\lambda)}\, d(E_\lambda y_0, y_0). \tag{18}$$

Але завдяки (13)

$$\sum_{n=1}^{N} \left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)^{2n+2} \frac{m_n}{2\lambda+1} \;\le\; G_1^2(\lambda),$$

отже, (18) зводиться до виразу

$$\sum_{n=1}^{N} z_n^2 \cdot m_n \;\le\; \int_0^\infty d(E_\lambda y_0, y_0) \;=\; \| y_0 \|^2.$$

Навпаки, нехай збігається ряд (15). Як і при доведенні теореми 3 в [11], для встановлення вкладення $x_0 \in \mathcal{D}(G_1(A))$ досить побудувати таку послідовність функцій $\{\phi_n(\lambda)\}_{n=1}^\infty$, що:

1) $\phi_n(\lambda)$ монотонно зростають при $n \to \infty$;

2) $\int_0^\infty \phi_n(\lambda)\, d(E_\lambda x_0, x_0) \le c \quad \forall n \in \mathbb{N}$;

3) існує стала $c' > 0$ така, що $c' G_1^2(\lambda) \le \lim\limits_{n\to\infty} \phi_n(\lambda)$, $\lambda \ge \lambda_0 > 1$.

Після цього, використовуючи лему Фату, пересвідчуємося, що функція

$$\phi(\lambda) \;=\; \lim_{n\to\infty} \phi_n(\lambda)$$

є інтегровною. За теоремою Лебега інтегровною відносно міри $d(E_\lambda x_0, x_0)$ також буде функція $c' G_1(\lambda)$, а інтегровність останньої еквівалентна належності x_0 до $\mathcal{D}(G_1(A))$.

Для побудови послідовності $\{\phi_n(\lambda)\}_{n=1}^\infty$ розглянемо часткову суму ряду (15). Аналогічно (18) маємо

$$\sum_{n=1}^{N} z_n^2 \cdot m_n \;=\; \int_0^\infty \sum_{n=1}^{N} \frac{m_n}{2\lambda+1} \left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)^{2n+2} d(E_\lambda x_0, x_0). \tag{19}$$

Позначимо підінтегральний вираз через $\phi_N(\lambda)$ і покажемо, що послідовність $\{\phi_n(\lambda)\}_{n=1}^\infty$ є шуканою. Очевидно, що $\phi_n(\lambda)$ монотонно зростають при $n \to \infty$. Зі збіжності ряду (15) випливає, що

$$\exists c > 0\colon \int_0^\infty \phi_n(\lambda)\, d(E_\lambda x_0, x_0) \;\le\; c \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Залишається показати, що для $\phi_N(\lambda)$ виконується й третя умова. А при $\lambda \ge 1$ вона випливає з (19), тому що

$$\forall \lambda \ge 1 \quad \exists N_\lambda \quad \forall N > N_\lambda\colon\; \phi_N(\lambda) \;=\; \sum_{n=1}^{N} \frac{m_n}{2\lambda+1} \left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)^{2n+2} \;\ge$$

$$\ge\; \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{N} \frac{m_n}{2\lambda+1} \left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)^{2n} \;\ge\; \frac{1}{8} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m_n}{2\lambda+1} \left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)^{2n} \;=\; \frac{G_1^2(\lambda)}{8}.$$

Теорему доведено.

Доведена теорема за формою є аналогом теореми про узагальнені граничні значення задачі (8) з монографії В. І. Горбачук, М. Л. Горбачука [13, с. 84].

З теореми 1 випливає, що наближення (11) є ненасиченими, оскільки точність наближення покращується в залежності від гладкості початкового значення x_0.

Покажемо, як за допомогою теореми 1 можна отримати характеризацію належності векторів x_0 до $\mathcal{D}(A^{\sigma})$ у термінах швидкості прямування до нуля z_N^2. Для цього розглянемо $m_n = n^{2\sigma}$ і, відповідно, $g(\xi) = \xi^{2\sigma}$.

Має місце така теорема.

Теорема 2. $x_0 \in \mathcal{D}(A^{\sigma})$, $\sigma > 0$, *тоді і тільки тоді, коли ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n^2 \cdot n^{2\sigma} \tag{20}$$

збігається.

Доведення. З теореми 1 випливає, що досить довести еквівалентність належності x_0 до $\mathcal{D}(A^{\sigma})$ та x_0 до $\mathcal{D}(G_2(A))$, де $G_2(\lambda)$ визначається по $g(\xi) = \xi^{2\sigma}$ за допомогою (14). Зауважимо, що досить довести існування сталих c', c'' таких, що при $\lambda \geq 1$

$$c'\lambda^{2\sigma} \leq G_2^2(\lambda) \leq c''\lambda^{2\sigma}. \tag{21}$$

Для $G_2(\cdot)$ маємо

$$G_2^2(\lambda) = \frac{1}{2\lambda+1}\int_0^{\infty} \xi^{2\sigma}\left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)^{2\xi} d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\lambda+1}\int_0^{\infty} \frac{t^{2\sigma}e^{-t}}{2^{2\sigma+1}\ln^{2\sigma+1}\frac{\lambda+1}{\lambda}}\,dt = \frac{1}{2\lambda+1}\frac{\Gamma(2\sigma+1)}{2^{2\sigma+1}\ln^{2\sigma+1}\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)}. \tag{22}$$

Скориставшись нерівностями $\frac{1}{2\lambda} \leq \ln\left(1+\frac{1}{\lambda}\right) \leq \frac{1}{\lambda}$, справедливими при $\lambda \geq 1$, з (22) отримуємо (21).

Як наслідки з теореми 2, покажемо, як отримати аналог прямої теореми (з точністю до сталої) та оберненої теореми з роботи [11].

Наслідок **1** (пряма теорема). *Нехай* $x_0 \in \mathcal{D}(A^{\sigma})$, $\sigma > 0$. *Тоді*[1]

$$z_N^2 = o\left(\frac{1}{N^{2\sigma+1}}\right).$$

Доведення. Із зображення (17) бачимо, що $z_n^2 \geq z_m^2$ при $n < m$, а тому при $2^k \leq n \leq 2^{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$, виконується

$$2^{2\sigma}\cdot\left(2^k\right)^{2\sigma} z_{2^k}^2 \geq n^{2\sigma} z_n^2 \geq \frac{\left(2^{k+1}\right)^{2\sigma}}{2^{2\sigma}} z_{2^{k+1}}^2, \tag{23}$$

тобто із збіжності ряду (20) випливає збіжність ряду

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k\cdot\left(2^{k+1}\right)^{2\sigma} z_{2^{k+1}}^2 = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty}\left(2^k\right)^{2\sigma+1} z_{2^k}^2,$$

[1] Зауважимо, що наслідок 1 дещо покращує теорему 1 з [11], де встановлено, що $z_N^2 \leq cN^{-2\sigma-1}$.

тому $\left(2^k\right)^{2\sigma+1} z_{2^k}^2 \to 0$. З урахуванням першої нерівності (23) бачимо, що й

$$n^{2\sigma+1} z_n^2 \le 2^{2\sigma+1}\left(2^k\right)^{2\sigma+1} z_{2^k}^2 \to 0, \quad n \to \infty,$$

що слід було довести.

Розглянемо, як це було зроблено у [11], послідовність дійсних чисел $\{c_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ таку, що:

1) $c_N > 0$;

2) c_N монотонно зростають (не спадають);

3) $\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{c_{2^k}} < \infty$.

Як приклад, такою послідовністю може бути $c_N = c \cdot \ln^{1+\varepsilon} N$, $c_N = \ln N \times \times (\ln \ln N)^{1+\varepsilon}$ тощо. Тоді має місце такий наслідок.

Наслідок 2 (обернена теорема). *Нехай для деякого* $x_0 \in \mathfrak{H}$, *послідовності* $\{c_N\}_{N\in\mathbb{N}}$, *що задовольняє умови* (1) – (3), *та деякого* $\sigma > 0$ *виконується*

$$z_N^2 < \frac{1}{c_N} \frac{1}{N^{2\sigma+1}}.$$

Тоді $x_0 \in \mathcal{D}(A^{\sigma})$.

Доведення. Справедливість наслідку випливає з теореми 2, умов 1 – 3 на послідовність $\{c_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ та нерівності, що виконується для всіх натуральних k:

$$\sum_{2^k}^{2^{k+1}-1} \frac{1}{Nc_N} \le \sum_{2^k}^{2^{k+1}-1} \frac{1}{2^k c_{2^k}} = \frac{1}{c_{2^k}}.$$

1. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1967. – 464 с.
2. *Суетин П. К.* Классические ортогональные многочлены. – 3-е изд. – М.: Физматлит, 2005. – 480 с.
3. *Горбачук М. Л., Городецкий В. В.* О полиномиальном приближении решений дифференциально-операторных уравнений в гильбертовом пространстве // Укр. мат. журн. – 1984. – **36**, № 4. – С. 500 – 502.
4. *Arov D. Z., Gavrilyuk I. P.* A method for solving initial value problems for linear differential equations in Hilbert space based on the Cayley transform // Numer. Func. Anal. and Optimiz. – 1993. – **14**, № 5, 6. – P. 456 – 473.
5. *Gavrilyuk I. P., Makarov V. L.* The Cayley transform and the solution of an initial value problem for a first order differential equation with an unbounded operator coefficient in Hilbert space // Ibid. – 1994. – **15**, № 5, 6. – P. 583 – 598.
6. *Макаров В. Л., Василик В. Б., Рябичев В. Л.* Неулучшаемые по порядку оценки скорости сходимости метода преобразования Кэли для приближения операторной экспоненты // Кибернетика и систем. анализ. – 2002. – № 4. – С. 180 – 185.
7. *Гаврилюк И. П., Макаров В. Л.* Сильно позитивные операторы и численные алгоритмы без насыщения точности. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2004. – 500 с.
8. *Кашпіровський О. Г., Митник Ю. В.* Апроксимація розв'язків операторно-диференціальних рівнянь за допомогою операторних поліномів // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 11. – С. 1506 – 1516.
9. *Пашковский С.* Вычислительные применения многочленов и ряды Чебышева. – М.: Наука, 1983. – 452 с.
10. *Кашпіровський О. Г.* Апроксимація гладких розв'язків операторно-диференціальних рівнянь // Наук. зап. НаУКМА. Фіз.-мат. науки. – 2002. – **20**. – С. 16 – 21.
11. *Торба С. М.* Прямі та обернені теореми наближених методів розв'язування абстрактної задачі Коші // Укр. мат. журн. – 2007. – **59**, № 6. – С. 838 – 852.
12. *The transforms* and applications handbook // Ed. A. D. Puolarikas. – 2nd ed. – Aylesfort: CRC Press, New York, NY: IEEE Press, 2000. – 1335 p.
13. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1984. – 283 с.

Одержано 07.11.07