К теории целых матриц-функций экспоненциального типа

М. Г. Крейн

Пусть n — некоторое натуральное число. С квадратной матрицей $A=\|a_{ik}\|_1^n$ порядка n будем ассоциировать линейное преобразование

$$\eta_j=\sum_{k=1}^{n} a_{jk}\xi_k \quad (j=1, 2, \ldots, n)$$

в n-мерном унитарном пространстве E_n; это преобразование сокращенно будем записывать так:

$$y=Ax.$$

Под нормой $\|A\|$ матрицы A будем понимать норму преобразования (оператора), порождаемого матрицей A в E_n [1]. Таким образом,

$$\|A\|=\max_{x\in E_n}\frac{|Ax|}{|x|} \qquad \left(|x|=\sqrt{\sum_1^n|\xi_j|^2}\right).$$

Заметим, что

$$\frac{1}{n}\sqrt{\sum_{j,\,k=1}^{n}|a_{jk}|^2}\leqslant\|A\|\leqslant\sqrt{\sum_{j,\,k=1}^{n}|a_{jk}|^2}. \tag{0.0}$$

Мы будем рассматривать матрицы-функции $F(z)=\|f_{jk}(z)\|_1^n$ комплексного аргумента z. Такая функция будет целой (мероморфной), если все ее элементы целые функции (мероморфные).

Мы докажем следующее предложение.

Т е о р е м а 1. *Пусть* $F(z)=\|f_{jk}(z)\|_1^n$ *— целая матрица-функция порядка* n*, допускающая при некотором целом* $p\geqslant 0$ *представление*

$$F^{-1}(z)=\frac{C_{-1}}{z}+C_0+C_1z+\ldots+C_{p-1}z^{p-1}+z^p\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_k}{z-\alpha_k}, \tag{0.1}$$

где все α_k $(k=1,2,\ldots)$ *вещественны, а* $C_{-1}, C_0,\ldots,C_{p-1}$, A_k $(k=1,2,\ldots)$ *суть матрицы порядка* n*, причем*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\|A_k\|}{|\alpha_k|}<\infty.$$

[1] Впрочем, так как линейная совокупность M_n всех квадратных матриц конечномерна, то в ней все нормы топологически эквивалентны, и поэтому для нашей цели безразлично, из какого определения нормы в M_n исходить; в частности, за норму матрицы A можно было бы взять выражение, стоящее в правой части (0.0).

Тогда $F(z)$ — не выше экспоненциального типа, т. е.

$$\overline{\lim_{|z|\to\infty}} \frac{\log\|F(z)\|}{|z|} < \infty \tag{0.2}$$

и при этом

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\overset{+}{\log}\|F(x)\|}{1+x^2}\,dx < \infty. \tag{0.3}$$

Для скалярного случая ($n=1$) эта теорема была доказана нами ранее [1а] и она нашла ряд приложений в теории эрмитовых операторов [1б, в], в частности, в теории обыкновенных и сингулярных операторов Штурма-Лиувилля [1г].

Мы покажем, что теорема 1 для матриц-функций позволяет установить ряд важных свойств матриц монодромии некоторых классов систем диференциальных уравнений, к которым нас привели [1д, е] попытки обобщить исследования А. М. Ляпунова о диференциальных уравнениях с периодическими коэфициентами.

§ 1. Доказательство основной теоремы

Обозначим через (P) класс всех мероморфных функций $f(z)$, обладающих тем свойством, что в каждой из двух полуплоскостей $\operatorname{Im} z > 0$ и $\operatorname{Im} z < 0$ функция $\log|f(z)|$ допускает положительную гармоническую мажоранту.

Класс (P) является некоторым линейным кольцом, т. е., если $f_1, f_2 \in (P)$, то $c_1 f_1 + c_2 f_2 \in (P)$ и $f_1 \cdot f_2 \in (P)$.

Если $f \in (P)$ и f не имеет невещественных нулей, то также $f^{-1} \in (P)$.

Если f допускает представление

$$f = \frac{c_{-1}}{z} + c_0 + c_1 z + \ldots + c_{p-1} z^{p-1} + z^p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{z-\alpha_k},$$

где $p \geqslant 0$, α_k $(k=1, 2, \ldots)$ все вещественны, и

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{a_k}{\alpha_k}\right| < \infty,$$

то $f \in (P)$.

Все эти утверждения содержатся в общих положениях, приведенных в [1а]. Так же доказан следующий важный для нас факт:

Для целой функции $f(z)$ принадлежность классу (P) эквивалентна двум условиям

1) $$\overline{\lim_{|z|\to\infty}} \frac{\log|f(z)|}{|z|} < \infty, \tag{1.1}$$

2) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\overset{+}{\log}|f(x)|\,dx}{1+x^2} < \infty. \tag{1.2}$$

После этих замечаний теорема 1 доказывается без всякого труда. Пусть

$$F^{-1}(z) = \|g_{jk}(z)\|_1^n.$$

Получающиеся из (0,1) представления для $g_{jk}(z)$ $(j, k=1, 2, \ldots, n)$ показывают, что $g_{jk}(z) \in (P)$ $(j, k=1, 2, \ldots, n)$. Отсюда определители

$$|g_{jk}(z)|_1^n \in (P),$$

а так как

$$|g_{jk}(z)|_1^n = \Delta^{-1}(z), \quad \text{где} \quad \Delta(z) = |f_{jk}(z)|_1^n,$$

то $\Delta^{-1}(z) \in (P)$, а значит, и $\Delta(z) \in (P)$.

Принимая во внимание затем, что $f_{jk}(z)$ $(j, k=1, 2, \ldots, n)$ равно произведению $\Delta(z)$ на алгебраическое дополнение соответствующего элемента $g_{jk}(z)$ $(j, k=1, 2, \ldots, n)$ в определителе $|g_{jk}(z)|_1^n$, находим, что все $f_{jk}(z) \in (P)$ $(j, k=1, 2, \ldots, n)$.

Таким образом, все функции $f_{jk}(z)$ $(j, k=1, 2, \ldots, n)$ удовлетворяют условиям (1.1) и (1.2). Но тогда этим условиям будет удовлетворять и функция

$$\|F(z)\| \leqslant \sqrt{\sum_{j, k=1}^{n} |f_{jk}(z)|^2}.$$

Теорема доказана.

Замечание 1. Попутно доказано, что $\Delta(z) \in (P)$, т. е.

$$\lim_{|z| \to \infty} \frac{\log|\Delta(z)|}{|z|} < \infty, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\overset{+}{\log}|\Delta(x)|}{1+x^2}\, dx < \infty. \tag{1.3}$$

Замечание 2. Для скалярного случая $(n=1)$ теорема 1 была обобщена нами в том направлении, что условие вещественности чисел a_k $(k=1, 2, \ldots)$ было заменено более общим [1]:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{\operatorname{Im} a_k}{a_k^2} \right| < \infty.$$

Это же обобщение допускает теорема 1 и для случая матриц-функций.

§ 2. Применения теоремы при исследовании матриц монодромии

Пусть $\mathfrak{J}$ — некоторая неособенная постоянная эрмитова матрица, а $H(t) = \|h_{jk}(t)\|_1^n$ — эрмитова матрица-функция, элементы которой определены и интегрируемы в интервале $(0, \omega)$.

Рассмотрим диференциальную систему

$$\frac{dx}{dt} = i\lambda \mathfrak{J} H(t)\, x. \tag{2.1}$$

---

[1]) При доказательстве этого обобщения в [1а] мы допустили ошибку, которая, однако, может быть исправлена.

Если $U(t;\lambda)=\|u_{jk}(t;\lambda)\|_1^n$ есть решение матричной диференциальной системы

$$\frac{dU}{dt}=i\lambda\mathfrak{J}H(t)\,U,\quad U(0)=I,$$

то *матрицей монодромии системы* (2.1) будет матрица $U(\omega;\lambda)$, являющаяся, между прочим, целой функцией λ.

Любое решение $x=x(t)$ системы (2.1) может быть получено по формуле

$$x(t)=U(t;\lambda)\,x_0;\quad x_0=x(0). \tag{2.2}$$

Нас будет интересовать тот случай, когда матрица $H(t)$ *эрмитово неотрицательна*, т. е. форма

$$(H(t)\,x,\,x)=\sum_{j,k=1}^{n}h_{jk}(t)\,\xi_k\overline{\xi}_j\geqslant 0\qquad(0\leqslant t\leqslant\omega). \tag{I}$$

В этом случае из (2.1) находим, что

$$\frac{d}{dt}(\mathfrak{J}^{-1}x,\,x)=i(\lambda-\overline{\lambda})\,(H(t)\,x,\,x)\begin{matrix}\leqslant 0 \text{ при } \operatorname{Im}\lambda\geqslant 0\\ \geqslant 0 \quad \text{,,} \quad \operatorname{Im}\lambda\leqslant 0.\end{matrix}$$

Таким образом,

$$\frac{1}{\operatorname{Im}\lambda}(\mathfrak{J}^{-1}x_\omega,\,x_\omega)\leqslant\frac{1}{\operatorname{Im}\lambda}(\mathfrak{J}^{-1}x_0,\,x_0),\qquad(x_\omega=x(\omega;\lambda),\ \operatorname{Im}\lambda\neq 0).$$

Так как в силу (2.2) $x_\omega=U(\omega;\lambda)\,x_0$, то, обозначая краткости ради $U(\omega;\lambda)$ просто через U_λ, будем иметь

$$\frac{1}{\operatorname{Im}\lambda}(\mathfrak{J}^{-1}U_\lambda x_0,\,U_\lambda x_0)\leqslant\frac{1}{\operatorname{Im}\lambda}(\mathfrak{J}^{-1}x_0,\,x_0)\quad\text{при } \operatorname{Im}\lambda\neq 0 \tag{2.3}$$

и

$$(\mathfrak{J}^{-1}Ux_0,\,Ux_0)=(\mathfrak{J}^{-1}x_0,\,x_0)\quad\text{при}\quad\operatorname{Im}\lambda=0. \tag{2.4}$$

Заметим, что

$$U(\omega;\lambda)=I+i\lambda\mathfrak{J}H_0+C_2\lambda^2+\ldots, \tag{2.5}$$

где

$$H_0=\int_0^\omega H(t)\,dt. \tag{2.5'}$$

Пусть теперь $\mathcal{E}$ — произвольная числовая $\mathfrak{J}^{-1}$-унитарная матрица, т. е.

$$(\mathfrak{J}^{-1}\mathcal{E}x,\,\mathcal{E}x)=(\mathfrak{J}^{-1}x,\,x)\qquad(x\in E_n)$$

и [1])

$$|U(\omega;\lambda)+\mathcal{E}|\neq 0. \tag{2.6}$$

---

[1]) Через $|A|$ обозначается определитель матрицы A. В силу (2.5) условие (2.6) будет выполнено, если $\mathcal{E}=I$ и вообще, если $|I+\mathcal{E}|\neq 0$.

Введем в рассмотрение обобщенное преобразование Кэли

$$\Phi(\lambda) = i\{U(\omega;\lambda) - \mathcal{E}\}\{U(\omega;\lambda) + \mathcal{E}\}^{-1}.$$

Полагая

$$y_0 = (U(\omega;\lambda) + \mathcal{E})\,x_0,$$

будем иметь

$$\Phi(\lambda)\,y_0 = i(U(\omega;\lambda) - \mathcal{E})\,x_0$$

и, стало быть,

$$U(\omega;\lambda)\,x_0 = \frac{1}{2}(I - i\Phi(\lambda))\,y_0, \quad x_0 = \frac{\mathcal{E}^{-1}}{2}(I + i\Phi(\lambda))\,y_0.$$

Внося полученное выражение для x_0 и Ux_0 в (2.3), найдем, что

$$\frac{\operatorname{Im}(\mathfrak{J}^{-1}\Phi(\lambda)\,y_0, y_0)}{\operatorname{Im}\lambda} \leqslant 0 \quad \text{при} \quad \operatorname{Im}\lambda \neq 0. \tag{2.7}$$

Заметим теперь, что если λ не совпадает с корнем уравнения

$$|U(\omega;\lambda) + \mathcal{E}| = 0,$$

то вместе с x_0, пробегающим все E_n, также и y_0 пробегает все E_n. Отсюда заключаем, что при любом $y_0 \in E_n$ и любом невещественном λ выполняется (2.7).

Из (2.7) вытекает (см., например, [2] гл. IV), что[1])

$$(\mathfrak{J}^{-1}\Phi(\lambda)\,y_0, y_0) = \gamma_0 - \gamma_1\lambda - \lambda\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varrho_k}{\alpha_k(\alpha_k - \lambda)} + \frac{\varrho_0}{\lambda}, \tag{2.8}$$

где α_k $(k=1, 2, \ldots)$ — вещественные полюсы $(\neq 0)$ матрицы-функции $\Phi(\lambda)$, γ_0 вещественно, а γ_1 и ϱ_k $(k=0, 1, 2, \ldots)$ неотрицательные величины, при этом

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varrho_k}{\alpha_k^2} < \infty. \tag{2.9}$$

Легко видеть, что $\gamma_0, \gamma_1, \varrho_k$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$ суть эрмитовы формы от y_0, т. е. им отвечают матрицы порядка n: Γ_0, Γ_1, R_k $(k=0, 1, 2, \ldots)$, такие, что

$$\gamma_0 = (\Gamma_0 y_0, y_0), \quad \gamma_1 = (\Gamma_1 y_0, y_0), \quad \varrho_k = (R_k y_0, y_0) \qquad (k=0, 1, 2, \ldots).$$

Следовательно, соотношение (2.8) означает, что

$$\mathfrak{J}^{-1}\Phi(\lambda) = \Gamma_0 - \Gamma_1\lambda - \lambda\sum_{k=1}^{\infty}\frac{R_k}{\alpha_k(\alpha_k - \lambda)} + \frac{R_0}{\lambda}, \tag{2.10}$$

при этом в силу (2.9)[2])

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\|R_k\|}{\alpha_k^2} < \infty. \tag{2.11}$$

---

[1]) Для упрощения записи мы предполагаем, что $\lambda=0$ не является полюсом $\Phi(\lambda)$.

[2]) Так как $(R_k y, y) \geqslant 0$, то $\|R_k\| \leqslant$ следа R_k $(k=0, 1, 2, \ldots)$.

Так как

$$\Phi(\lambda) = iI - 2\mathcal{E}\{U(\omega, \lambda) + \mathcal{E}\}^{-1},$$

то из (2.10) следует, что

$$\{U(\omega; \lambda) + \mathcal{E}\}^{-1} = C_0 + C_1\lambda + \lambda\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_k}{\alpha_k(\alpha_k - \lambda)} + \frac{B_0}{\lambda},$$

где

$$C_0 = \frac{1}{2}\mathcal{E}^{-1}(iI - \mathfrak{J}\Gamma_0), \quad C_1 = \frac{1}{2}\mathcal{E}^{-1}\mathfrak{J}\Gamma_1, \quad B_k = \frac{1}{2}\mathcal{E}^{-1}\mathfrak{J}R_k \qquad (k=0, 1, 2, \ldots)$$

при этом, очевидно, снова[1])

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\|B_k\|}{\alpha_k^2} < \infty.$$

Таким образом, к матрице-функции $F(\lambda) = U(\omega; \lambda) + \mathcal{E}$ применима теорема 1, откуда $F(\lambda)$ удовлетворяет условиям (0.2) и (0.3). Но тогда и $U(\omega; \lambda)$ удовлетворяет этим условиям. Нами доказана

Теорема 2. *Если эрмитова матрица-функция $H(t)$ удовлетворяет условию (!), а $\mathfrak{J}$ — любая неособенная эрмитова матрица, то матрица монодромии $U(\omega; \lambda)$ системы (2.1) удовлетворяет двум условиям*

1) $$\overline{\lim_{|\lambda|\to\infty}}\frac{\log\|U(\omega; \lambda)\|}{|\lambda|} < \infty;$$

2) $$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\overset{+}{\log}\|U(\omega; \lambda)\|}{1+\lambda^2}d\lambda < \infty.$$

Отметим, что при установлении свойств 1), 2) целой матрицы-функции $U(\omega; \lambda)$ мы использовали только ее свойство (2.3).

2. Попутно мы доказали, что определитель

$$\Delta(\lambda) = |U(\omega; \lambda) + \mathcal{E}|$$

имеет только вещественные нули и что он удовлетворяет условиям (1.3).

Заметим, что нули функции $\Delta(\lambda)$ совпадают с характеристическими числами краевой задачи[2])

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = i\lambda\mathfrak{J}H(t)x, \\ x(\omega) + \mathcal{E}x(0) = 0, \end{cases} \tag{2.12}$$

причем кратность всякого $\lambda = \lambda_0$ как нуля функции $\Delta(\lambda)$ совпадает с числом линейно независимых решений системы (2.12) при $\lambda = \lambda_0$. Последнее можно усмотреть из простоты полюсов у $\{U(\omega; \lambda) + \mathcal{E}\}^{-1}$.

---

[1]) В силу того, что $\|AB\| \leqslant \|A\| \cdot \|B\|$.

[2]) Пользуясь этим, можно непосредственно доказать вещественность нулей $\Delta(\lambda)$.

Если $\Delta(\lambda)$ не минимального типа, т. е.

$$h(\varphi) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log|\Delta(re^{i\varphi})|}{r} \neq 0 \qquad (0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi),$$

то нули $\Delta(\lambda)$ составят последовательность

$$\ldots \leqslant \lambda_{-2} \leqslant \lambda_{-1} < \lambda_0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \qquad (\lambda_{-1} < 0 < \lambda_0),$$

уходящую на бесконечность в обе стороны, и при этом (см. [1a]) в силу выполнения условия

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\overset{+}{\log} |\Delta(\lambda)|}{1+\lambda^2} d\lambda < \infty$$

будут иметь место асимптотические формулы

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|\lambda_{-n}|}{n} = 2\pi \left[h\left(\frac{\pi}{2}\right) + h\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right]^{-1}.$$

В частности, в качестве $\mathcal{E}$ можно всегда выбрать матрицу I и тогда все сказанное будет применимо к „полупериодической" краевой задаче

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = i\lambda \mathfrak{J} H(t)\, x, \\ x(\omega) = -x(0). \end{cases} \tag{2.13}$$

Если матрица H_0 в (2.5′) неособенная, т. е., кроме условия (!), выполняется еще условие

$$\int_0^{\omega} (H(t)\,x, x)\, dt > 0 \quad \text{при} \quad x \neq 0, \tag{!!}$$

то, как легко видеть, знак равенства в (2.3) исключается (см. [1e]).

В этом случае условие (2.6) будет выполняться для любой $\mathfrak{J}^{-1}$-унитарной матрицы $\mathcal{E}$.

В частности, все сказанное ранее можно будет применить к „периодической" краевой задаче

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = i\lambda \mathfrak{J} H(t)\, x, \\ x(\omega) = x(0), \end{cases} \tag{2.14}$$

получающейся при $\mathcal{E} = -I$.

§ 3. Об одном специальном случае системы (2.1)

Краевые задачи (2.13) и (2.14) представляют особый интерес для того случая, когда $n=2$,

$$\mathfrak{J} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad H(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ b(t) & c(t) \end{pmatrix},$$

где $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant \omega)$ — вещественные интегрируемые функции. В этом случае система (2.1) приобретает вид

$$\begin{cases} \dfrac{d\xi_1}{dt} = \lambda(b\xi_1 + c\xi_2), \\ \dfrac{d\xi_2}{dt} = -\lambda(a\xi_1 + b\xi_2). \end{cases} \tag{3.1}$$

Условие (!) будет означать, что

$$a(t) \geqslant 0, \quad c(t) \geqslant 0, \quad a(t)c(t) - b^2(t) \geqslant 0 \qquad (0 \leqslant t \leqslant \omega), \tag{3.2}$$

а условие (!!) при наличии (3.2) будет эквивалентно тому, что

$$\int_0^\omega a(t)\,dt \int_0^\omega c(t)\,dt - \left(\int_0^\omega b(t)\,dt\right)^2 > 0. \tag{3.3}$$

В этом случае характеристические числа краевых задач (2.13) и (2.14) будут перемежаться по определенному закону, и они будут служить концами зон устойчивости и неустойчивости системы (3.1), в которой коэфициенты $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ доопределены для всех t как периодические функции с периодом ω (см. об этом в [1д]).

Не без некоторого труда нам удалось доказать, что для системы (3.1), удовлетворяющей условиям (3.2) и (3.3):

$$\overline{\lim_{|\lambda|\to\infty}} \frac{\log \|U(\omega;\lambda)\|}{|\lambda|} = \int_0^\omega \sqrt{ac-b^2}\,dx. \tag{3.4}$$

В рассматриваемом случае равенство (3.4) эквивалентно утверждению, что тип определителя $\Delta(\lambda) = |U(\omega;\lambda) + \mathcal{E}|$ равен правой части (3.4), т. е. в (3.4) величину $\|U(\omega;\lambda)\|$ можно заменить на $|\Delta(\lambda)|$).

В случае существования у системы (2.12) бесконечного числа положительных характеристических чисел: $\lambda_0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots$ соотношение (3.4) дает:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{n} = \pi \left(\int_0^\omega \sqrt{ac-b^2}\,dx\right)^{-1}.$$

Аналогичное можно утверждать и для отрицательных характеристических чисел краевой задачи (2.12)[1]) какова бы ни была $\mathfrak{J}^{-1}$-унитарная матрица

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

---

[1]) Заметим, что, как можно показать, у системы (2.12) будет конечное число характеристических чисел в том и только том случае, когда a, b, c кусочно-постоянные функции и $ac-b^2=0$ во всех точках непрерывности функций a, b, c.

Заметим, что в рассматриваемом случае $\mathfrak{J}^{-1}=-\mathfrak{J}$ и

$$(\mathfrak{J}x, x)=\frac{1}{i}(\xi_1\bar{\xi}_2-\xi_2\bar{\xi}_1);$$

матрица $\mathcal{E}$ будет $\mathfrak{J}$-унитарной в том и только том случае, когда $|\alpha\delta-\beta\gamma|=1$.

Положим

$$U(\omega;\lambda)=\begin{pmatrix}\varphi_1(\lambda) & \varphi_2(\lambda)\\ \psi_1(\lambda) & \psi_2(\lambda)\end{pmatrix},$$

где φ_i, ψ_i $(i=1, 2)$ — некоторые целые вещественные функции λ.

Так как $U(\omega; 0)=I$, то

$$\varphi_1(0)=1,\quad \varphi_2(0)=0$$
$$\psi_1(0)=0,\quad \psi_2(0)=1.$$

В силу (2.4): $|U(\omega;\lambda)|\equiv 1$ и поэтому

(I) $$\varphi_1(\lambda)\psi_2(\lambda)-\varphi_2(\lambda)\psi_1(\lambda)\equiv 1.$$

Если теперь положить

$$\begin{cases}\eta_1=\varphi_1(\lambda)\xi_1+\varphi_2(\lambda)\xi_2,\\ \eta_2=\psi_1(\lambda)\xi_1+\psi_2(\lambda)\xi_2,\end{cases}$$

то неравенство (2.3) для $U(\omega;\lambda)$ (в котором знак равенства мы исключили условием (3.3)) будет теперь означать, что

$$\frac{\eta_1\bar{\eta}_2-\eta_2\bar{\eta}_1}{\lambda-\bar{\lambda}}<\frac{\xi_1\bar{\xi}_2-\xi_2\bar{\xi}_1}{\lambda-\bar{\lambda}}. \tag{3.5}$$

Придавая ξ_1 и ξ_2 вещественные значения, мы из (3.5) получим, что:

(II) *При любом вещественном α функция*

$$w(\lambda)=-\frac{\cos\alpha\,\varphi_1(\lambda)+\sin\alpha\,\varphi_2(\lambda)}{\cos\alpha\,\psi_1(\lambda)+\sin\alpha\,\psi_2(\lambda)}$$

отображает верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im}\lambda>0$ *в свою часть.*

В силу этого свойства функции $\cos\alpha\,\varphi_1(\lambda)+\sin\alpha\,\varphi_2(\lambda)$ и $\cos\alpha\,\psi_1(\lambda)+\sin\alpha\,\psi_2(\lambda)$ образуют вещественную пару в смысле Н. Г. Чеботарева (см. [2]), а стало быть, их нули всегда просты, вещественны и перемежаются. Но тогда и φ_1, φ_2 и ψ_1, ψ_2 будут давать вещественные пары.

Свойства (I) и (II) функций $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$ позволяют доказать для рассматриваемого случая $(n=2)$ теорему 2, с использованием теоремы 1 только для скалярного случая. Соответствующим рассуждением мы уже пользовались в [1г] — приведем его.

Из (II) при $\alpha = 0, \frac{\pi}{2}$ следует, что

$$-\frac{\varphi_1(\lambda)}{\psi_1(\lambda)} = c'_0 + c'_1\lambda - \frac{\varrho'_0}{\lambda} - \lambda \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varrho'_j}{\alpha'_j(\alpha'_j - \lambda)} \quad \left(c'_1 \geqslant 0,\ \varrho'_i > 0,\ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varrho'_j}{\alpha_j^2} < \infty\right),$$

$$-\frac{\varphi_2(\lambda)}{\psi_2(\lambda)} = c''_0 + c''_1\lambda - \lambda \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varrho''_j}{\alpha''_i(\alpha''_j - \lambda)} \quad \left(c''_1 \geqslant 0,\ \varrho''_i > 0,\ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varrho''_j}{\alpha''^2_j} < \infty\right).$$

Вычитая из верхнего равенства нижнее, получим, учитывая (I), что

$$\frac{1}{\psi_1(\lambda)\,\psi_2(\lambda)} = c_0 + c_1\lambda + \frac{\varrho_0}{\lambda} + \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varrho_j}{\alpha\ (\alpha_i - \lambda)} \quad \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{|\varrho_j|}{\alpha_j^2} < \infty\right).$$

Отсюда $\psi_1\psi_2 \in (P)$. Так как ψ_1 и ψ_2 образуют вещественную пару, то ψ_1/ψ_2 отображает всю верхнюю (нижнюю) полуплоскость в одну из этих полуплоскостей, но тогда $\psi_1/\psi_2 \in P$, а следовательно, $\psi_1^2 = \psi_1\psi_2(\psi_1/\psi_2) \in (P)$ и $\psi_1 \in (P)$.

Аналогично показывается, что $\psi_2 \in (P)$, а тогда и $\varphi_i = \psi_i(\varphi_i/\psi_i) \in (P)$. Таким образом, все эти функции удовлетворяют условиям (1.1) и (1.2), а стало быть, матрица $U(\omega;\lambda)$, из них составленная, обладает свойствами, указанными в теореме 2.

Заканчивая, заметим, что в силу свойств (I) и (II) теория матриц монодромии системы (3.1) оказывается теснейшим образом связанной с нашей теорией [1б, в] *целых эрмитовых операторов* с индексом дефекта (1.1) и, в частности, с *проблемой продолжения* эрмитово положительных функций.

Эти глубокие связи между совершенно различными на первый взгляд задачами мы рассмотрим в другом месте.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Крейн, а) К теории целых функций экспоненциального типа, Изв. АН СССР, т. II, 1947, 309—326.

б) Об одном замечательном классе эрмитовых операторов, ДАН СССР, т. 44/5, 1944, 191—195.

в) Основные положения теории представления эрмитовых операторов с индексом дефекта (m, m), Укр. матем. журн. № 2, 1949, 1—65.

г) О краевой задаче Штурма-Лиувилля в интервале $(0, \infty)$ и об одном классе интегральных уравнений, ДАН СССР, т. 74, № 6, 1950, 1125—1128.

д) Обобщение некоторых исследований А. М. Ляпунова о линейных диференциальных уравнениях с периодическими коэфициентами, ДАН СССР, т. 73, № 3, 1950, 445—448.

е) О применении одного алгебраического предложения в теории матриц монодромии, Усп. матем. наук, т. 6, вып. I, 1951.

ж) О проблеме продолжения эрмитово положительных функций, ДАН СССР, т. XXVI, № 1, 1940, 17—22.

2. Н. Г. Чеботарев и Н. Н. Мейман, Проблема Рауса-Гурвица для полиномов и целых функций, Труды Матем. ин-та АН СССР, 26, 1, 1949, 1—331.

Поступила 24.II 1951. Одесса.