УДК 512.536

**И. В. Протасов** (Киев. нац. ун-т им. Т. Шевченко)

# УЛЬТРАФИЛЬТРЫ И РАЗБИЕНИЯ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

We prove that every $PS$-ultrafilter on a group without second order elements is a Ramsey ultrafilter. For arbitrary $PS$-ultrafilter $\varphi$ on a countable group $G$, we construct a mapping $f: G \to \omega$ such that $f(\varphi)$ is a $P$-point in the space $\omega^*$. We determine a new class of subselective ultrafilters considerably wider than the class of $PS$-ultrafilters.

Доведено, що кожен $PS$-ультрафільтр на групі без елементів порядку 2 рамсеїв. Для довільного $PS$-ультрафільтра $\varphi$ на зліченній групі $G$ побудовано відображення $f: G \to \omega$ таке, що $f(\varphi)$ — $P$-точка у просторі $\omega^*$. Визначено новий клас субселективних ультрафільтрів, значно ширший за клас $PS$-ультрафільтрів.

Согласно теореме Рамсея при любом 2-раскрашивании $\chi: [X]_2 \to \{0, 1\}$ семейства всех двухэлементных подмножеств бесконечного множества $X$ найдется такое бесконечное подмножество $Y \subseteq X$, что семейство $[Y]_2$ одноцветно. Свободный ультрафильтр $\varphi$ на множестве $X$ называется *рамсеевым*, если для любого 2-раскрашивания $\chi: [X]_2 \to \{0, 1\}$ найдется такое подмножество $Y \in \varphi$, что $[Y]_2$ одноцветно. Рамсеевы ультрафильтры характеризуются следующим свойством селективности. Свободный ультрафильтр $\varphi$ на множестве $X$ рамсеев тогда и только тогда, когда для любого разбиения множества $X$ либо одно из подмножеств разбиения является элементом ультрафильтра $\varphi$, либо найдется такое подмножество $F \in \varphi$, которое содержит не более одного элемента в каждом подмножестве разбиения.

Из теоремы Рамсея следует, что для любого 2-раскрашивания бесконечной абелевой группы $G$ найдется такое бесконечное подмножество $A \subseteq G$, что подмножество $PS(A)$ одноцветно, где

$$PS(A) = \{a + b : a, b \in A, a \neq b\}.$$

В работе [1] свободный ультрафильтр $\varphi$ на группе $G$ назван *$PS$-ультрафильтром*, если для любого 2-раскрашивания группы $G$ найдется такое подмножество $A \in \varphi$, что $PS(A)$ одноцветно. Разумеется, всякий рамсеев ультрафильтр на группе является $PS$-ультрафильтром. Обратное утверждение неверно: сильно суммируемый ультрафильтр на счетной булевой группе является $PS$-ультрафильтром, однако весьма далек от рамсеевых ультрафильтров [1]. Насколько класс $PS$-ультрафильтров шире класса рамсеевых ультрафильтров? В частности, существуют ли нерамсеевы $PS$-ультрафильтры на группе целых чисел? Каковы свойства селективности $PS$-ультрафильтров относительно разбиений групп? Цель статьи — получить ответы на эти и связанные с ними вопросы.

Кратко о содержании статьи. Согласно теореме 1 каждый $PS$-ультрафильтр на группе $G$ без элементов порядка 2 рамсеев. Теорема 2 полностью сводит задачу исследования нерамсеевых $PS$-ультрафильтров к случаю 2-групп. Из теоремы 3 следует, что если $PS$-ультрафильтр на группе $G$ является идемпотентом полугруппы ультрафильтров, то $B(G) \in \varphi$, где $B(G) = \{g \in G : 2g = 0\}$. В силу теоремы 4 каждый $PS$-ультрафильтр на счетной группе правосократим либо является сдвигом идемпотента. Эта $PS$-альтернатива используется при доказательстве теоремы 5 о $P$-точке, следствием которой является существование экзотических моделей системы аксиом $ZFC$ теории множеств, в которых вообще нет $PS$-ультрафильтров на счетных группах. Отметим, что в естественных моделях $ZFC$, например, $ZFC + CH$, рамсеевы, а следовательно, и $PS$-ультрафильтры существуют на любой счетной группе. Каждый $PS$-ультрафильтр на произвольной группе субселективен, т. е. имеет свойство селективности относительно разложений группы на смежные классы по подгруппам. Однако класс субселективных ультрафильтров существенно шире класса $PS$-ультрафильтров. Согласно теореме 6 на любой бесконечной группе $G$ существует субселективный идемпотент, причем для его построения не требуется дополнительных к $ZFC$ теоретико-множественных предположений. Теорема 7 дает описание групп, на которых каждый свободный ультрафильтр субселективен.

Основным техническим инструментом в данной работе является полугруппа ультрафильтров на абелевой группе. Детальное изложение свойств этой полугруппы и ее применений к комбинаторике чисел можно найти в монографиях [2, 3]. Приведем лишь самые необходимые определения и свойства полугруппы ультрафильтров.

Для группы $G$ обозначим через $\beta G$ чех-стоунову компактификацию группы $G$ как дискретного пространства. Элементами компактного пространства $\beta G$ являются всевозможные ультрафильтры на группе $G$, а базой топологии является семейство подмножеств $\{\overline{A} : A \subseteq G\}$, где $\overline{A} = \{\varphi \in \beta G : A \in \varphi\}$. Для произвольного фильтра $\psi$ на группе $G$ обозначим $\overline{\psi} = \bigcap\{\overline{A} : A \in \psi\}$. Тогда $\overline{\psi}$ — замкнутое подпространство в $\beta G$ и каждое непустое замкнутое подпространство в $\beta G$ может быть задано подходящим фильтром. Отождествим группу $G$ с семейством всех главных ультрафильтров на $G$, а множество $\beta G \setminus G$ всех свободных ультрафильтров обозначим через $G^*$.

Продолжим операцию сложения с группы $G$ на пространство $\beta G$, полагая для ультрафильтров $\xi, \eta \in \beta G$ и подмножества $A \subseteq G$

$$A \in \xi + \eta \Leftrightarrow \{g \in G : A - g \in \eta\} \in \xi.$$

Выберем произвольное подмножество $Q \in \xi$ и для каждого элемента $x \in Q$ зафиксируем некоторое подмножество $P_x \in \eta$. Тогда подмножество $\bigcup\{x + P_x : x \in Q\}$ является элементом ультрафильтра $\xi + \eta$, и семейство таких подмножеств образует базу ультрафильтра $\xi + \eta$.

Операция сложения ультрафильтров ассоциативна, непрерывна по первому аргументу при фиксированном втором аргументе и непрерывна по второму аргументу, если фиксированный первый аргумент является главным ультрафильтром. При этом множество $G^*$ всех свободных ультрафильтров является замкнутой подполугруппой в $\beta G$ и, как и всякая замкнутая подполугруппа в $\beta G$, содержит идемпотент. Заметим, что подполугруппа $G^*$ далеко не коммутативна. Так, для любого ультрафильтра $\xi \in G^*$ найдется такой ультрафильтр $\eta \in G^*$, что $\xi + \eta \neq \eta + \xi$.

Каждый гомоморфизм $f$ группы $G$ на группу $H$ однозначно продолжается до непрерывного гомоморфизма полугруппы $\beta G$ на полугруппу $\beta H$. Это продолжение будем обозначать тем же символом $f$. Для произвольного ультрафильтра $\varphi$ на группе $G$ базу ультрафильтра $f(\varphi)$ образуют подмножества $f(A)$, $A \in \varphi$. В частности, если $G = H$ и $f(x) = mx$, где $m$ — фиксированное целое число, то $m\varphi$ — ультрафильтр с базой $\{mA : A \in \varphi\}$, где $mA = \{mg : g \in A\}$.

Для ультрафильтра $\varphi$ на группе $G$ обозначим через $PS(\varphi)$ фильтр на группе $G$ с базой $\{PS(A): A \in \varphi\}$. Для свободного ультрафильтра $\varphi$ на группе $G$ следующие условия равносильны ([1], леммы 1, 4):

1) $\varphi$ — $PS$-ультрафильтр;

2) $PS(\varphi)$ — ультрафильтр;

3) $PS(\varphi) = \varphi + \varphi$.

Подмножество $A$ группы $G$ называется *2-независимым*, если для любых подмножеств $\{a, b\}, \{c, d\} \in [A]_2$ из равенства $a + b = c + d$ следует $\{a, b\} = \{c, d\}$.

**Лемма 1.** *$PS$-ультрафильтр $\varphi$ на группе $G$ рамсеев тогда и только тогда, когда существует 2-независимое подмножество $A \in \varphi$.*

***Доказательство.*** Пусть $\varphi$ — $PS$-ультрафильтр, $A$ — 2-независимое подмножество, $A \in \varphi$. Рассмотрим произвольное отображение $\chi: [G]_2 \to \{0, 1\}$ и определим новое отображение $\chi': G \to \{0, 1\}$ согласно следующему правилу: если для элемента $g \in G$ найдется такое подмножество $\{a, b\} \in [A]_2$, что $g = a + b$, то положим $\chi'(g) = \chi(\{a, b\})$, иначе $\chi'(g) = 0$. Это определение корректно, поскольку $A$ — 2-независимое подмножество. Выберем подмножество $B \in \varphi$, $B \subseteq A$ так, что подмножество $PS(B)$ $\chi'$-одноцветно. Тогда $\chi([B]_2) = \chi'(PS(B))$. Следовательно, $\varphi$ — рамсеев ультрафильтр.

Покажем, что каждый рамсеев ультрафильтр $\varphi$ на группе $G$ содержит 2-независимое подмножество. Определим отображение $\chi: [G]_4 \to \{0, 1\}$ согласно следующему правилу: если $B \in [G]_4$ и существует такое разбиение $B = \{a, b\} \cup \{c, d\}$, что $a + b = c + d$, то полагаем $\chi(B) = 1$, иначе $\chi(B) = 0$. Поскольку $\varphi$ — рамсеев ультрафильтр, то найдется подмножество $A \in \varphi$ такое, что подмножество $[A]_4$ $\chi$-одноцветно. Допустим, что подмножество $A$ не является 2-независимым. Тогда $a + b = c + d$ для некоторых различных подмножеств $\{a, b\}, \{c, d\} \in [A]_2$. Значит, $\chi(\{a, b, c, d\}) = 1$ и, следовательно, $\chi(B) = 1$ для всех подмножеств $B \in [A]_4$. В частности, $\chi(\{a, b, c, x\}) = 1$ для всех $x \in A \setminus \{a, b, c\}$. Так как подмножество $A \setminus \{a, b, c\}$ бесконечно, то получаем противоречие с определением отображения $\chi$.

Пусть $H$ — подгруппа группы $G$. Свободный ультрафильтр $\varphi$ на группе $G$ назовем *$H$-селективным*, если справедливо одно из следующих утверждений:

1) существует такой элемент $g \in G$, что $g + H \in \varphi$;

2) существует такое подмножество $A \in \varphi$, что $|A \cap (g + H)| \leq 1$ для любого элемента $g \in G$.

Ультрафильтр, $H$-селективный относительно любой подгруппы $H$ группы $G$, назовем *субселективным*.

**Лемма 2.** *Любой $PS$-ультрафильтр $\varphi$ на группе $G$ является субселективным ультрафильтром.*

***Доказательство.*** Пусть $H$ — подгруппа группы $G$, $f$ — факторный гомоморфизм $G$ на $G/H$. Предположим, что $g + H \notin \varphi$ для любого элемента $g \in G$. Тогда $f(\varphi)$ — свободный ультрафильтр на $G/H$. Допустим, что для любого подмножества $F \in \varphi$ найдется такой элемент $g \in G$, что $|F \cap (g + H)| > 1$. Тогда $f(2F) \cap f(PS(F)) \neq \varnothing$. Отсюда следует, что $f(2\varphi) = f(PS(\varphi))$. Так как $\varphi$ — $PS$-ультрафильтр, то $PS(\varphi) = \varphi + \varphi$. Поскольку $\varphi$ — гомоморфизм, то $f(\varphi) + f(\varphi) = 2f(\varphi)$. В силу теоремы 3.9 из [4] $f(\varphi)$ — главный ультрафильтр. Полученное противоречие показывает, что выполняется одно из требований определения $H$-селективности.

**Лемма 3.** *Пусть $H$ — подгруппа группы $G$, $f$ — факторный гомоморфизм $G$ на $G/H$. Если $\varphi$ — $PS$-ультрафильтр на $G$, а $f(\varphi)$ — рамсеев ультрафильтр на $G/H$, то $\varphi$ — рамсеев ультрафильтр.*

***Доказательство.*** Поскольку $f(\varphi)$ — свободный ультрафильтр, то согласно лемме 2 найдется такое подмножество $F \in \varphi$, что $|F \cap (g + H)| = 1$ для любого элемента $g \in F$. Значит, сужение отображения $f$ на подмножество $F$ инъективно. Поэтому существует такое сечение $h$ гомоморфизма $f$, что $\varphi = h(f(\varphi))$. Следовательно, $\varphi$ — рамсеев ультрафильтр.

**Лемма 4.** *Пусть группа $G$ представлена в виде объединения трансфинитной возрастающей цепи подгрупп $G = \bigcup \{G_\alpha : \alpha < \gamma\}$ так, что $\gamma$ — предельный ординал и $G_\beta = \bigcup \{G_\alpha : \alpha < \beta\}$ для всех предельных ординалов $\beta < \gamma$. Допустим, что фактор-группа $G_{\alpha+1}/G_\alpha$ не имеет элементов порядка 2 для всех $\alpha < \gamma$. Если $\varphi$ — $PS$-ультрафильтр на $G$ и $G_\alpha \notin \varphi$ для любого $\alpha < \gamma$, то найдется такое подмножество $F \in \varphi$, что $|F \cap (g + G_\alpha)| \le 1$ для всех $g \in G \setminus G_\alpha$, $\alpha < \gamma$.*

***Доказательство.*** Поскольку фактор-группа $G_{\alpha+1}/G_\alpha$ не имеет элементов порядка 2, то в силу леммы де Брейна–Эрдеша ([2], лемма 3.33) существует такое разбиение $G_{\alpha+1}/G_\alpha = \{0\} \cup Y_1(\alpha) \cup Y_2(\alpha) \cup Y_3(\alpha)$, что $Y_i(\alpha) \cap 2Y_i(\alpha) = \varnothing$ для $i = 1, 2, 3$. Обозначим через $X_i(\alpha)$ прообраз множества $Y_i(\alpha)$ при естественном гомоморфизме $G_{\alpha+1}$ на $G_{\alpha+1}/G_\alpha$. Тогда $G_{\alpha+1} \setminus G_\alpha = X_1(\alpha) \cup X_2(\alpha) \cup X_3(\alpha)$. Положим $X_i = \bigcup \{X_i(\alpha) : \alpha < \gamma\}$, $i = 1, 2, 3$. Понятно, что $G \setminus G_0 = X_1 \cup X_2 \cup X_3$ и $2X_i \cap X_i = \varnothing$, $i = 1, 2, 3$. Так как $G_0 \notin \varphi$, то найдется индекс $j \in \{1, 2, 3\}$ такой, что $X_j \in \varphi$. Поскольку $G_\alpha \notin \varphi$ для всех $\alpha < \gamma$, то $X_j \in \varphi + \varphi$. Следовательно, $X_j \in PS(\varphi)$. Выберем такое подмножество $F \in \varphi$, что $PS(F) \subseteq X_j$. Возьмем произвольный элемент $g \in G \setminus G_0$ и выберем индекс $\alpha$ так, что $g \in G_{\alpha+1}/G_\alpha$.

Допустим, что $|F \cap (g + G_\alpha)| > 1$. Выберем различные элементы $a, b \in G_\alpha$ так, что $g + a, g + b \in F \cap (g + G_\alpha)$. Поскольку $PS(F) \subseteq X_j$, то $(g + a) + (g + b) \in X_j$. С другой стороны, $2g + (a + b) \in 2X_j$, что противоречит соотношению $X_j \cap 2X_j = \varnothing$.

**Лемма 5.** *Любой $PS$-ультрафильтр $\varphi$ на окружности $T$ рамсеев.*

***Доказательство.*** Будем рассматривать окружность $T = R/Z$ как полуинтервал $[0, 1)$ с операцией сложения по модулю 1 и естественной топологией. Сдвигая ультрафильтр $\varphi$ на некоторый элемент группы $T$ и заменяя $\varphi$ на $-\varphi$, можно считать, что $\varphi$ сходится к 0 и $[0, 1/2) \in \varphi$. Для каждого натурального числа $n$ положим $K_n = [1/2^n, 1/2^{n-1})$, $A_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{2n}$, $A_1 = T \setminus A_0$. Выберем $i \in \{0, 1\}$ так, что $A_i \in PS(\varphi)$. Пусть для определенности $i = 0$. Подберем $A \in \varphi$ так, что $PS(A) \subseteq A_0$. Если $x, y \in K_n$, то $x + y \in K_{n+1}$. Если $x \in K_n$, $y \in K_m$, то $x + y \in K_n$ для всех достаточно больших $m$. Значит, $A \subseteq A_0$ и $|A \cap K_n| \le 1$ для всех $n$. Отсюда следует, что $A$ — 2-независимое подмножество. Применяем лемму 1.

**Теорема 1.** *Любой $PS$-ультрафильтр на группе $G$ без элементов порядка 2 является рамсеевым ультрафильтром.*

***Доказательство.*** Вначале вложим группу $G$ в прямую сумму групп рациональных чисел и квазициклических $p$-групп, $p \neq 2$. Затем каждое слагаемое прямой суммы погрузим в окружность. Таким образом, группа $G$ реализована как подгруппа прямой суммы $\bigoplus_{\alpha<\gamma} T_\alpha$ окружностей $T_\alpha$, причем проекция $\mathrm{pr}_\alpha G$ группы $G$ на каждое слагаемое $T_\alpha$ не имеет элементов порядка 2. Если для некоторого $\alpha<\gamma$ $\mathrm{pr}_\alpha \varphi$ является свободным ультрафильтром, то согласно лемме 5 ультрафильтр $\mathrm{pr}_\alpha \varphi$ рамсеев. В силу леммы 3 ультрафильтр $\varphi$ также рамсеев. Поэтому далее предполагаем, что $\mathrm{pr}_\alpha \varphi \in T_\alpha$ для любого $\alpha<\gamma$. Для каждого ненулевого элемента $g \in G$ обозначим через $\max g$ номер его последней ненулевой координаты. Положим $\mu(g)=g(\max g)$. Предположим, что ультрафильтр $\max \varphi$ — главный. Тогда $\max\varphi=\alpha$ для некоторого индекса $\alpha<\gamma$ и $\mathrm{pr}_\alpha\varphi=h$ для некоторого элемента $h\in T_\alpha$. Пусть $\overline{h}$ — элемент прямой суммы, определенный равенствами $\overline{h}(\alpha)=h$, $\overline{h}(\beta)=0$ для всех $\beta\neq\alpha$. Заменим ультрафильтр $\varphi$ на $\varphi-h$. Повторяя эту процедуру, через конечное число шагов приходим к одной из следующих двух возможностей:

1) $\max\varphi$ — главный ультрафильтр, а проекция $\varphi$ на $T_{\max\varphi}$ — свободный ультрафильтр. В силу доказанного выше $\varphi$ — рамсеев ультрафильтр.

2) $\max\varphi$ — свободный ультрафильтр. Для каждого $\alpha<\gamma$ отождествим топологическим изоморфизмом слагаемое $T_\alpha$ с фиксированной окружностью $T$. Тогда $\mu$ можно считать отображением $\mu\colon \bigoplus_{\alpha<\gamma} T_\alpha \to T$. В силу компактности $T$ ультрафильтр $\mu(\varphi)$ сходится к некоторому элементу $t\in T$. Рассмотрим два возможных варианта:

2а) $t\neq 0$. Выберем непересекающиеся окрестности $U, V$ точек $t, 2t$ так, чтобы $U+U\subseteq V$. Так как ультрафильтр $\mu(\varphi)$ сходится к $t$, а ультрафильтр $\max\varphi$ свободен, то $U\in\mu(\varphi+\varphi)$. Поскольку $\varphi$ — $PS$-ультрафильтр, то найдется такое подмножество $F\in\varphi$, что $\mu(PS(F))\subseteq U$. Допустим, что $a,b\in F$, $a\neq b$, $\max a=\max b$. Тогда $\mu(a+b)\in V$, что противоречит условию $U\cap V=\varnothing$. Положим $G_\alpha = G\cap \bigoplus_{\beta\le a} T_\beta$, $\alpha<\gamma$. Используя лемму 4, выбираем такое подмножество $A\in\varphi$, $A\subseteq F$, что $|A\cap(g+G_\alpha)|\le 1$ для всех $g\in$ $\in G\setminus G_\alpha$, $\alpha<\gamma$. Тогда для любого $\alpha<\gamma$ существует не более одного элемента $a\in A$, удовлетворяющего условию $\max a=\alpha$. Очевидно, что $A$ — 2-независимое подмножество и, следовательно, применима лемма 1.

2б) $t=0$. Воспользуемся разбиением $T=A_0\cup A_1$ из доказательства леммы 5. Выберем $i\in\{0,1\}$, $F\in\varphi$ так, чтобы $\mu(F)\subseteq A_i$, $|\mu(F)\cap[1/2^n,$ $1/2^{n-1})|\le 1$ для всех натуральных чисел $n$. Согласно лемме 4 найдем $A\in\varphi$, $A\subseteq F$, каждый элемент которого однозначно определяется своей последней ненулевой координатой. Нетрудно убедиться, что $A$ — 2-независимое подмножество. Следовательно, и в этом случае применима лемма 1.

Следующая теорема сводит задачу изучения $PS$-ультрафильтров на произвольных группах к аналогичной задаче на 2-группах, т. е. группах, в которых порядок каждого элемента есть степень двойки.

**Теорема 2.** *Пусть $\varphi$ — $PS$-ультрафильтр на группе $G$, $H$ — максимальная 2-подгруппа группы $G$. Тогда либо $\varphi$ — рамсеев ультрафильтр, либо найдется такой элемент $g\in G$, что $g+H\in\varphi$.*

***Доказательство.*** Пусть $f$ — факторный гомоморфизм $G$ на $G/H$. Если $f(\varphi)$ — главный ультрафильтр, то $g+H\in\varphi$ для некоторого элемента $g\in G$. Допустим, что $f(\varphi)$ — свободный ультрафильтр. В силу теоремы 1 $f(\varphi)$ — рамсеев, а согласно лемме 3 $\varphi$ также рамсеев.

Ультрафильтр $\varphi$ на множестве $X$ называется *$Q$-точкой,* если для любого разбиения $X$ на конечные подмножества найдется такой элемент ультрафильтра $\varphi$, который пересекается с каждым подмножеством разбиения не более чем по одному элементу. Отметим, что существуют $Q$-точки, которые не являются рамсеевыми ультрафильтрами.

**Следствие.** *Если $PS$-ультрафильтр $\varphi$ на счетной группе $G$ является $Q$-точкой, то $\varphi$ — рамсеев ультрафильтр.*

*Доказательство.* Согласно теореме 2 можно считать, что $G$ — 2-группа. Представим $G$ в виде объединения возрастающей последовательности конечных подгрупп $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ так, что $|G_{n+1}/G_n| = 2$ для любого натурального числа $n$. Так как $\varphi$ — $Q$-точка, то найдется подмножество $A \in \varphi$, удовлетворяющее условию $|A \bigcap (G_{n+1} \backslash G_n)| \le 1$ для всех $n$. Ясно, что $A$ — 2-независимое подмножество и можно воспользоваться леммой 1.

**Теорема 3.** *Пусть $\varphi$ — $PS$-ультрафильтр на группе $G$ и для любого подмножества $F \in \varphi$ найдутся такие различные элементы $a, b \in F$, что $a + b \in F$. Тогда $\varphi + \varphi = \varphi$ и $2\varphi = 0$.*

*Доказательство.* Из условия теоремы непосредственно следует, что $PS(\varphi) = \varphi$. Поскольку $\varphi$ — $PS$-ультрафильтр, то $PS(\varphi) = \varphi + \varphi$. Значит, $\varphi + \varphi = \varphi$. Предположим, что $2\varphi \ne 0$. Тогда $B(G) \notin \varphi$ и согласно лемме де Брейна – Эрдеша ([2], лемма 3.33) найдется такое подмножество $A \in \varphi$, что $A \bigcap B(G) = \varnothing$, $A \bigcap 2A = \varnothing$. Подберем подмножества $B_1, B_2, B_3 \in \varphi$ так, чтобы выполнялись следующие условия:

$$B_3 \subseteq B_2 \subseteq B_1 \subseteq A, \quad PS(B_1) \subseteq A, \quad PS(B_2) \subseteq B_1, \quad PS(B_3) \subseteq B_2 .$$

Рассмотрим произвольные элементы $a, b \in B_3$. Тогда $a + b \in B_2$, $(a + b) + b \in B_1$, $(a + 2b) + a \in A$. Значит, $a + b \in A$, $2(a + b) \in A$, что противоречит условию $A \bigcap 2A = \varnothing$. Следовательно, $2\varphi = 0$.

Свободный ультрафильтр $\varphi$ на группе $G$ называется *правосократимым*, если для любых ультрафильтров $\varphi_1, \varphi_2$ на группе $G$ из равенства $\varphi_1 + \varphi = \varphi_2 + \varphi$ следует $\varphi_1 = \varphi_2$. В силу теоремы 8. 18 из [2] для произвольного свободного ультрафильтра $\varphi$ на счетной группе $G$ следующие условия равносильны:

1) $\varphi$ — правосократимый ультрафильтр;

2) если $\varepsilon$ — идемпотент полугруппы $\beta G$ и $\varepsilon + \varphi = \varphi$, то $\varepsilon = 0$;

3) найдутся такие подмножества $F \in \varphi$, $F_x \in \varphi$, $x \in F$, что $x + F_x \bigcap y + F_y = \varnothing$ для всех различных элементов $x, y \in F$.

**Теорема 4.** *Для $PS$-ультрафильтра $\varphi$ на счетной группе $G$ справедливо одно из следующих утверждений:*

1) *$\varphi$ — правосократимый ультрафильтр;*

2) *$\varphi = g + \varepsilon$, где $g \in G$, $\varepsilon + \varepsilon = \varepsilon$.*

*Доказательство.* Поскольку любой рамсеев ультрафильтр правосократим ([2], следствие 8. 14), то ввиду теоремы 2 можно считать, что максимальная 2-подгруппа $S$ группы $G$ является элементом ультрафильтра $\varphi$. Допустим, что $\varphi$ не является правосократимым. Тогда $\varphi = \varepsilon + \varphi$ для некоторого идемпотента $\varepsilon \in G^*$. Так как $\varphi$ — $PS$-ультрафильтр, а $\varepsilon + \varepsilon = \varepsilon$, то

$$PS(\varphi) = \varepsilon + 2\varphi = 2\varepsilon + \varphi + \varphi. \tag{1}$$

Обозначим через $S_n$ множество элементов порядка $2^n$ группы $G$. Допустим, что $S_n \notin \varphi$ для любого натурального числа $n$. Положим $A_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_{2n}$, $A_1 = S \setminus A_0$. Выберем $i \in \{0, 1\}$ так, что $A_i \in \varphi$. Тогда $A_i \in 2\varepsilon + \varphi + \varphi$, $S \setminus A_i \in \varepsilon + 2\varphi$, что противоречит соотношению (1). Значит, найдется такое натуральное число $m$, что $S_m \in \varphi$. Сдвигая ультрафильтр $\varphi$ на элементы из $S$, можно считать, что $S_{m-1} \notin \varphi + g$ для всех $g \in S$. Покажем, что $m = 1$. Допустим противное. Согласно лемме о бабочке ([2], теорема 3. 40), примененной к соотношению (1), справедливо одно из следующих утверждений:

1) $\xi + 2\varphi = \varphi$ для некоторого ультрафильтра $\xi$ на группе $G$. Поскольку $2\varphi \neq 0$, то каждый элемент ультрафильтра $\xi + 2\varphi$ содержит бесконечное подмножество элементов из одного смежного класса по подгруппе $S_{m-1}$. В силу леммы 2 $\varphi$ является $S_{m-1}$-селективным ультрафильтром. Значит, найдется такой элемент $g \in G$, что $g + S_{m-1} \in \varphi$. Получено противоречие с выбором числа $m$;

2) $\eta + \varphi = 2\varphi$ для некоторого ультрафильтра $\eta$ на группе $G$. Из определения операции сложения ультрафильтров следует, что $a + F \subseteq S_{m-1}$ для подходящих элементов $a \in S$, $F \in \varphi$, $F \subseteq S_m$. Значит, $S_m - a \in \varphi$, что противоречит выбору $m$.

Итак, мы доказали, что $2\varphi = 0$. Из соотношения (1) и равенства $\varphi = \varepsilon + \varphi$ следует $\varepsilon = \varphi + \varphi$. Если $\varepsilon = \varphi$, то все доказано. Иначе, $\varphi + \varepsilon = \varphi + \varphi + \varphi = \varepsilon + \varphi = \varphi$. Значит, $\{\varepsilon, \varphi\}$ — группа порядка 2 с нулем $\varepsilon$. По теореме 2.3 из [5] найдется такой элемент $g \in G$, что $\varphi = g + \varepsilon$. Теорема доказана.

Свободный ультрафильтр $\varphi$ на множестве натуральных чисел $N$ называется *$P$-точкой* в пространстве $N^*$, если для любого разбиения $N$ либо одно из подмножеств разбиения является элементом ультрафильтра $\varphi$, либо найдется такой элемент ультрафильтра $\varphi$, пересечение которого с каждым подмножеством разбиения конечно. Ввиду теоремы Шелаха существуют модели $ZFC$ без $P$-точек в пространстве $N^*$.

**Теорема 5.** *Пусть $G$ — счетная группа, $\varphi$ — $PS$-ультрафильтр на группе $G$. Существует такое отображение $f\colon G \to N^*$, что $f(\varphi)$ — $P$-точка в пространстве $N^*$.*

***Доказательство.*** Если $\varphi$ — идемпотент полугруппы $G^*$, то такое отображение построено в [6], теорема 7.3, а также в [2], теорема 12.36. Поэтому в силу теоремы 4 можно считать, что $\varphi$ — правосократимый ультрафильтр. Выберем такие подмножества $F \in \varphi$, $F_x \in \varphi$, $x \in F$, что $x + F_x \cap y + F_y = \varnothing$ для всех различных элементов $x, y \in F$. Занумеруем элементы множества $F = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$. Не умаляя общности, можно считать, что $F_{x_1} \supset \ldots \supset F_{x_n} \supset \ldots$ и $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_{x_n} = \varnothing$. Положим $f(x) = n$ для всех $x \in F_{x_n} \setminus F_{x_{n+1}}$ и доопределим $f$ произвольно на $G \setminus F_{x_1}$. Заметим, что $f(\varphi)$ — свободный ультрафильтр на $N$. Зафиксируем произвольное разбиение $f(F_{x_1}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ и допустим, что $A_n \notin f(\varphi)$ для всех $n \in N$. Положим $B_n = f^{-1}(A_n) \cap F_{x_1}$. Для каждого элемента $x_n \in F_{x_1}$ выберем номер $m(n)$ так, что $x_n \in B_{m(n)}$. Так как $x_n + B_{m(n)} \notin x_n + \varphi$, то найдется такое подмножество $P_n \in \varphi$, $P_n \subseteq F_{x_n}$, что $x_n + P_n \cap x_n + B_{m(n)} = \varnothing$. Положим $P = \bigcup\{x + P_x : x \in F_{x_1}\}$. Поскольку $P \in \varphi + \varphi$ и $\varphi$ — $PS$-ультрафильтр, то найдется такое подмножество $Q \subseteq F_{x_1}$, $Q \in \varphi$, что $PS(Q) \subseteq P$. Покажем, что подмножество $f(Q) \cap A_n$ конечно для любого натурального числа $n$. Рассмотрим произвольный элемент $x_k \in Q$, удовлетворяющий условию $f(x_k) \in A_n$. Тогда $n = m(k)$. Если $y \in B_{m(k)} \cap F_{x_k}$, то $x + y \notin P$. Значит, $f(B_{m(k)} \cap P_{x_k}) = \{ f(x_k) \}$. Из определения отображения $f$ следует, что $f(Q \setminus P_{x_k})$ конечно. Значит, $f(Q) \cap A_n$ конечно и теорема доказана.

В силу леммы 2 каждый $PS$-ультрафильтр субселективен. Покажем, что класс субселективных ультрафильтров существенно шире класса $PS$-ультрафильтров. В частности, субселективные ультрафильтры произвольной нормы можно построить в $ZFC$ без дополнительных теоретико-множественных предположений. Вначале сделаем два простых замечания.

1. Если подгруппа $H$ группы $G$ конечна либо имеет конечный индекс, то любой свободный ультрафильтр на $G$ $H$-селективен.

2. Пусть $H, K$ — подгруппы группы $G$, причем $H \subseteq K$. Если ультрафильтр $\varphi$ на $K$ $H$-селективен в $K$, то $\varphi$ $H$-селективен в $G$.

**Лемма 6.** *Пусть $\psi$ — семейство бесконечных подгрупп группы $G$, удовлетворяющее следующим условиям:*

1) $\psi$ *замкнуто относительно конечных пересечений*;

2) $\bigcap \psi = \{0\}$;

3) $\psi$ — *максимальное по включению семейство бесконечных подгрупп со свойствами* 1), 2).

*Тогда любой свободный ультрафильтр $\varphi$ на $G$, содержащий семейство $\psi$, является субселективным.*

***Доказательство.*** Зафиксируем произвольную подгруппу $H$ группы $G$. Если $H \in \psi$, то все доказано. Допустим, что $H \notin \psi$ и выберем такую подгруппу $K \in \psi$, что $H \cap K = \{0\}$. Тогда $K \in \varphi$ и $(g + H) \cap K = \{g\}$ для любого элемента $g \in K$. Следовательно, $\varphi$ — $H$-селективен.

**Теорема 6.** *На любой бесконечной группе $G$ существует субселективный ультрафильтр $\varphi$, который является идемпотентом полугруппы $G^*$ и удовлетворяет условию $\|\varphi\| = |G|$, где $\|\varphi\| = \min\{|F| : F \in \varphi\}$.*

***Доказательство.*** Пусть вначале группа $G$ счетна. Тогда $G$ содержит подгруппу $S$, изоморфную либо группе целых чисел, либо квазициклической группе, либо прямой сумме счетного семейства нетривиальных конечных циклических групп. В первом и втором случаях (см. замечания) любой свободный ультрафильтр на $G$, содержащий $S$, является субселективным. В третьем случае семейство всех подгрупп конечного индекса из $S$ дополним до максимального семейства подгрупп $\psi$, удовлетворяющего условиям леммы 6. Поскольку $\overline{\psi} \cap G^*$ — замкнутая подполугруппа полугруппы $G^*$, то в качестве $\varphi$ можно выбрать любой идемпотент этой полугруппы.

Пусть $G$ — группа несчетной мощности. Тогда $G$ содержит подгруппу $S$, изоморфную прямой сумме $|G|$ нетривиальных циклических групп. Дополним семейство всех подгрупп группы $G$ индекса $< |G|$ до максимального семейства подгрупп $\psi$, удовлетворяющего условиям леммы 6. Тогда $\|\varphi'\| = |G|$ для любого ультрафильтра $\varphi' \in \overline{\psi} \cap G^*$ и в качестве $\varphi$ может быть произвольный идемпотент полугруппы $\overline{\psi} \cap G^*$.

**Теорема 7.** *Каждый свободный ультрафильтр на группе $G$ является субселективным тогда и только тогда, когда любая бесконечная подгруппа группы $G$ имеет конечный индекс.*

***Доказательство.*** *Достаточность* очевидна. Предположим, что группа $G$ содержит бесконечную подгруппу $H$ бесконечного индекса. Рассмотрим семейство $\psi$ всех подмножеств $F$ группы $G$ таких, что пересечение $F$ с бесконечным числом смежных классов по подгруппе $H$ бесконечно. Тогда любое максимальное замкнутое относительно конечных пересечений семейство $\varphi$ подмножеств из $\psi$ является ультрафильтром. Очевидно, что $\varphi$ не является $H$-селективным.

В конце работы [1] поставлено 5 вопросов о $PS$-ультрафильтрах и сильно-суммируемых ультрафильтрах. Теорема 1 дает положительный ответ на первый вопрос. Теорема 5 решает отрицательно второй вопрос. Ответы на четвертый и пятый вопросы получены в [7]. Результаты данной работы дают достаточные основания для формулировки следующей $PS$-гипотезы.

*Любой $PS$-ультрафильтр на счетной группе либо рамсеев, либо является сдвигом идемпотента.*

1. *Protasov I. V.* Ultrafilters on Abelian groups close to being Ramsey ultrafilters // Mat. Studii. – 1997. – **7**, № 2. – P. 133–138.
2. *Hindman N., Strauss D.* Algebra in the Stone–Čech compactification. – Berlin; New York: de Gruyter, 1998. – 485 p.
3. *Protasov I. V.* Combinatorics of numbers. – Lviv: VNTL, 1998. – 70 p.
4. *Протасов И. В.* Точки совместной непрерывности полугруппы ультрафильтров абелевой группы // Мат. сб. – 1996. – **187**, № 2. – С. 131–140.
5. *Protasov I. V.* Finite groups in $\beta G$ // Mat. Studii. – 1998. – **10**, № 1. – P. 17–22.
6. *Протасов И. В.* Фильтры и топологии на полугруппах // Мат. студ. – 1994. – **3**, № 5. – С. 15–28.
7. *Hindman N., Protasov I., Strauss D.* Strongly summable ultrafilters on Abelian groups // Mat. Studii. – 1998. – **10**, № 2. – P. 121–132.

Получено 17.02.99