УДК 512.64

В. М. Прокіп, канд. фіз.–мат. наук (Ін-т прикл. пробл. механіки і математики АН України, Львів)

ПРО ЄДИНІСТЬ УНІТАЛЬНОГО ДІЛЬНИКА МАТРИЧНОГО МНОГОЧЛЕНА НАД ДОВІЛЬНИМ ПОЛЕМ

The article deals with the conditions under which the unital divisor separated over an arbitrary field from a matrix polynomial is completely determined by its characteristic polynomial. The obtained result is used to solve matrix polynomial equations.

Встановлено умови, при яких виділений із матричного многочлена над довільним полем унітальний дільник однозначно визначається своїм характеристичним многочленом. Вказано також застосування здобутого результату до розв'язування матричних многочленних рівнянь.

Нехай $\mathcal{P}$ — довільне поле, $\mathcal{P}[x]$ — кільце многочленів над $\mathcal{P}$. Позначимо через $\mathcal{P}_n$ і $\mathcal{P}_n[x]$ кільця $n\times n$-матриць над $\mathcal{P}$ і $\mathcal{P}[x]$ відповідно. Розглянемо неособливу многочленну матрицю $A(x)\in\mathcal{P}_n[x]$ ($\det A(x)\not\equiv 0$), яку запишемо у вигляді матричного многочлена над полем $\mathcal{P}$: $A(x)=A_0x^s+A_1x^{s-1}+\ldots+A_s$, $A_i\in\mathcal{P}_n$, $i=0,1,\ldots,s$. Надалі через $d_A(x)$ позначатимемо найбільший спільний дільник (н. с. д.) мінорів $(n-1)$-го порядку матриці $A(x)$, I — одинична $n\times n$-матриця.

Припустимо, що матричний многочлен $A(x)$ можна зобразити у вигляді $A(x)=D(x)\,C(x)$, де $D(x)=Ix^r-D_1x^{r-1}-\ldots-D_r$, $D_j\in\mathcal{P}_n$, $j=1,2,\ldots,r$, — унітальний матричний многочлен. В даній роботі вказано умови, при яких виділений із матричного многочлена $A(x)$ унітальний дільник $D(x)$ однозначно визначається своїм характеристичним многочленом $\det A(x)=d(x)$. Одержаний результат дає можливість вказати клас матричних многочленів, для яких виділений унітальний дільник єдиний із заданим характеристичним многочленом, а також застосувати одержані результати до розв'язування матричних многочленних рівнянь. Питання про єдиність унітального дільника матричного многочлена над алгебраїчно замкненим полем характеристики нуль розглядалось у роботі [1].

Відомо [2], що для матриці $A(x)\in\mathcal{P}_n[x]$ існують матриці $U(x),V(x)\in GL_n(\mathcal{P}_n[x])$ такі, що $U(x)A(x)V(x)=F_A(x)=\operatorname{diag}(a_1(x),a_2(x),\ldots,a_n(x))$, де $a_j(x)\in\mathcal{P}[x]$, $j=1,2,\ldots,n$, — унітальні многочлени і $a_i(x)\mid a_{i+1}(x)$, $i=1,2,\ldots,n-1$. Матриця $F_A(x)$ називається канонічною діагональною формою (к. д. ф.) матриці $A(x)$. Відомо також [2, 3], що якщо матриця $A(x)$ неособлива, то правими елементарними перетвореннями вона зводиться до нормальної форми Ерміта, тобто для матриці $A(x)$ існує матриця $W(x)\in GL_n(\mathcal{P}[x])$ така, що

$$A(x)\,W(x)=H_A(x)=\left\|\begin{matrix} h_1(x) & 0 & \ldots & \ldots & 0\\ h_{21}(x) & h_2(x) & 0 & \ldots & 0\\ \hdashline h_{n1}(x) & h_{n2}(x) & \ldots & \ldots & h_n(x)\end{matrix}\right\|,$$

де $h_i(x)\in\mathcal{P}[x]$, $i=1,2,\ldots,n$, — унітальні многочлени, причому, якщо $\deg h_i(x)\ge 1$, то $\deg h_{ij}(x)<\deg h_i(x)$ і $h_{ij}(x)=0$, якщо $h_i(x)=1$, для всіх $i>j$, $j=1,2,\ldots,i-1$.

Лема 1. *Нехай матриця* $A(x)\in\mathcal{P}_n[x]$ $(\det A(x)\not\equiv 0)$ *зображена у вигляді добутку* $A(x)=B(x)C(x)$, *де* $B(x),C(x)\in\mathcal{P}_n[x]$. *Якщо* $(\det B(x),\det C(x),d_A(x))=$

© В. М. ПРОКІП, 1993

$= 1$, *то для матриць* $U(x)$, $V(x) \in GL_n(\mathcal{P}[x])$ *таких, що* $U(x)A(x)V(x) = F_A(x)$, *існує матриця* $W(x) \in GL_n(\mathcal{P}[x])$ *така, що* $U(x)B(x)W(x) = F_B(x)$, $W^{-1}(x)C(x)V(x) = F_C(x)$.

Доведення. Нехай $F_A(x) = U(x)A(x)V(x)$ — к. д. ф. матриці $A(x)$. Оскільки $A(x)$ зображена у вигляді добутку, то

$$F_A(x) = U(x)B(x)C(x)V(x). \tag{1}$$

Для матриці $\overline{B}(x) = U(x)B(x)$ існує матриця $W(x) \in GL_n(\mathcal{P}[x])$ така, що $\overline{B}(x)W(x) = H_{\overline{B}}(x)$ — нормальна форма Ерміта. Тоді рівність (1) можна записати у вигляді $F_A(x) = U(x)B(x)W(x)W^{-1}(x)C(x)V(x) = H_{\overline{B}}(x)G(x)$. Оскільки $F_A(x)$ діагональна, а $H_{\overline{B}}(x)$ — нижня трикутна матриці, то, очевидно, $G(x)$ — нижня трикутна матриця. Останню рівність запишемо так:

$$\operatorname{diag}(a_1(x), a_2(x), \dots, a_n(x)) =$$

$$= \begin{Vmatrix} h_1(x) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ h_{21}(x) & h_2(x) & 0 & \dots & 0 \\ \hdashline h_{n1}(x) & h_{n2}(x) & \dots & \dots & h_n(x) \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} g_1(x) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ g_{21}(x) & g_2(x) & 0 & \dots & 0 \\ \hdashline g_{n1}(x) & g_{n2}(x) & \dots & \dots & g_n(x) \end{Vmatrix}. \tag{2}$$

Із (2) випливає, що $a_i(x) = h_i(x)\,g_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$, і $g_i(x)$ — теж унітальні многочлени. Оскільки інваріантні множники матриці $A(x)$ не змінюються при элементарних перетвореннях, то в силу (2) маємо

$$d_A(x) = \prod_{i=1}^{n-1} a_i(x) = \prod_{i=1}^{n-1} h_i(x)\,g_i(x).$$

Позначимо через $\delta(x) = (\det B(x), \det C(x))$. Оскільки $(\delta(x), d_A(x)) = 1$, то покажемо, що $(h_i(x), g_j(x)) = 1$ для всіх i, j за винятком $i = j = n$. Припустимо, що для деяких $1 \le k \le n$, $1 \le l \le n$, які одночасно не рівні n, справедлива нерівність $(h_k(x), g_l(x)) = \alpha(x) \not\equiv 1$. Тоді $\alpha(x) \mid d_A(x)$ (ділить) і $\alpha(x) \mid \delta(x)$, тобто $\alpha(x) \mid (\delta(x), d_A(x))$. Останнє суперечить взаємній простоті $\delta(x)$ і $d_A(x)$. Отже, $(h_i(x), g_j(x)) = 1$ для всіх i, j за винятком $i = j = n$ і $(h_n(x), g_n(x)) = \delta(x)$.

Помножимо в рівності (2) матрицю $H_{\overline{B}}(x)$ на i-й $(i < n)$ стовпчик матриці $G(x)$:

$$\begin{gathered} a_i(x) = h_i(x)\,g_i(x), \\ 0 = h_{i+1\,i}(x)\,g_i(x) + h_{i+1}(x)\,g_{i+1\,i}(x), \\ 0 = h_{i+2\,i}(x)\,g_i(x) + h_{i+2\,i+1}(x)\,g_{i+1\,i}(x) + h_{i+2}(x)\,g_{i+2\,i}(x), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 0 = h_{n\,i}(x)\,g_i(x) + \dots + h_{n\,n-1}(x)\,g_{n-1\,i}(x) + h_n(x)\,g_{n\,i}(x). \end{gathered} \tag{3}$$

Розглянемо другу рівність із (3). Якщо $h_{i+1}(x) = 1$, то, враховуючи те, що

$H_{\overline{B}}(x)$ — нормальна форма Ерміта матриці $\overline{B}(x)$, одержуємо $h_{i+1\,i}(x)=0$, а отже, і $g_{i+1\,i}(x)=0$. Якщо ж $\deg h_{i+1}(x)\geq 1$, то, враховуючи те, що $(h_i(x), g_j(x))=1$ для $i\neq j$, поділимо обидві частини цієї рівності на $g_i(x)$: $0=h_{i+1\,i}(x)+h_{i+1}(x)\,\overline{g}_{i+1\,i}(x)$, де $\overline{g}_{j\,i}(x)$ — частка від ділення $g_{j\,i}(x)$ на $g_i(x)$. З цієї рівності випливає $h_{i+1\,i}(x)=-h_{i+1}(x)\,\overline{g}_{i+1\,i}(x)$. Останнє суперечить тому, що $H_{\overline{B}}(x)$ — нормальна форма Ерміта матриці $\overline{B}(x)$. Отже, $h_{i+1\,i}(x)=0$, $g_{i+1\,i}(x)=0$. Тоді третя рівність із (3) набуває вигляду $0 \doteq h_{i+2\,i}(x)\,g_i(x)+h_{i+2}(x)\,g_{i+2\,i}(x)$. Нехай $h_{i+2}(x)=1$, звідси $h_{i+2\,i}(x)=0$, а отже, $g_{i+2\,i}(x)=0$. Якщо $\deg h_{i+2}(x)\geq 1$ (як і в попередній рівності, враховуючи взаємну простоту $h_{i+2}(x)$ і $g_i(x)$), то поділимо обидві її частини на $g_i(x)$: $0=h_{i+2\,i}(x)+h_{i+2}(x)\,\overline{g}_{i+2\,i}(x)$. Звідси маємо $h_{i+2\,i}(x)=-h_{i+2}(x)\,\overline{g}_{i+2\,i}(x)$, що неможливо, оскільки $\deg h_{i+2}(x)>\deg h_{i+2\,i}(x)$. Таким чином, $h_{i+2\,i}(x)=0$, $g_{i+2\,i}(x)=0$. Продовжуючи аналогічні міркування, далі одержуємо, що $h_{j\,i}(x)=0$ і $g_{j\,i}(x)=0$ для всіх $j>i$, $j=i+1, i+2, \ldots, n$. Оскільки $1\leq i<n$, то $h_{j\,i}(x)=g_{j\,i}(x)=0$ для всіх $j>i$, $j=1,2,\ldots,n$. Отже,

$$H_{\overline{B}}(x)=\operatorname{diag}(h_1(x), h_2(x), \ldots, h_n(x)),$$

$$G(x)=\operatorname{diag}(g_1(x), g_2(x), \ldots, g_n(x)).$$

Доведемо тепер, що $h_i(x)\,|\,h_{i+1}(x)$, $g_i(x)\,|\,g_{i+1}(x)$, $i=1,2,\ldots,n-1$. Із подільності $a_{i+1}(x)$ на $a_i(x)$ випливає, що $h_{i+1}(x)\,g_{i+1}(x)$ ділиться на $h_i(x)\,g_i(x)$. Враховуючи те, що $(g_i(x), h_j(x))=1$ для $i\neq j$, з останнього випливає $h_i(x)\,|\,h_{i+1}(x)$, $g_i(x)\,|\,g_{i+1}(x)$, $i=1,2,\ldots,n-1$. Отже, $H_{\overline{B}}(x)=F_B(x)$ і $G(x)=F_C(x)$. Лема доведена.

***Наслідок* 1.** *Нехай неособлива матриця* $A(x)\in\mathcal{P}_n[x]$ *зображена у вигляді добутку матриць* $B(x), C(x)\in\mathcal{P}_n[x]$, *тобто* $A(x)=B(x)C(x)$ *і* $(\det B(x), \det C(x))=\delta(x)$. *Якщо* $(\delta(x), d_A(x))=1$, *то к. д. ф. матриці* $A(x)$ *дорівнює добутку к. д. ф. матриць* $B(x)$ *і* $C(x)$, *тобто* $F_A(x)=F_B(x)F_C(x)$.

Із наслідку 1 випливає такий результат (див. також [3]).

***Наслідок* 2.** *Нехай* $B(x), C(x)\in\mathcal{P}_n[x]$, $\det B(x)\not\equiv 0$ *і* $\det C(x)\not\equiv 0$. *Якщо* $(\det B(x), \det C(x))=1$, *то* $F_B(x)F_C(x)=F_{BC}(x)$.

Нехай $A(x)\in\mathcal{P}_n[x]$ — многочленна матриця з попарно взаємно простими елементарними дільниками, тобто к. д. ф. її має вигляд $F_A(x)=\operatorname{diag}(1, \ldots, a(x))$, $a(x)\not\equiv\text{const}$. Оскільки $d_A(x)=1$, то, враховуючи наслідок 1, одержуємо такий наслідок.

***Наслідок* 3.** *Нехай многочленна матриця* $A(x)\in\mathcal{P}_n[x]$ $(\det A(x)\not\equiv\text{const})$, *елементарні дільники якої попарно взаємно прості, зображена у вигляді добутку* $A(x)=B(x)C(x)$, $B(x), C(x)\in\mathcal{P}_n[x]$. *Тоді* $F_A(x)=F_B(x)F_C(x)$.

Зауважимо, що якщо $\mathcal{P}$ — нескінченне поле, то мультиплікативні властивості к. д. ф. многочленних матриць над таким полем вивчались в [4].

Лема 2. *Нехай неособлива матриця* $A(x) \in \mathcal{P}_n[x]$ *ділиться зліва на неособливі матриці* $B(x), D(x) \in \mathcal{P}_n[x]$, *тобто* $A(x) = B(x)C(x) = D(x)R(x)$, $C(x),\ R(x) \in \mathcal{P}_n[x]$ *і* $(\det B(x), \det C(x), d_A(x)) = 1$, $(\det D(x), \det R(x), d_A(x)) = 1$. *Якщо* $\det D(x) \mid \det B(x)$, *то матриця* $B(x)$ *ділиться зліва на матрицю* $D(x)$, *тобто* $B(x) = D(x)Q(x)$.

Доведення. Нехай $(\det B(x), \det C(x)) = \delta_1(x)$ і $(\det D(x), \det R(x)) = \delta_2(x)$. Нехай далі $F_A(x) = U(x)A(x)V(x) = \operatorname{diag}(a_1(x), a_2(x), \ldots, a_n(x))$, $a_i(x) \mid a_{i+1}(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, $U(x), V(x) \in GL_n(\mathcal{P}[x])$ — к. д. ф. матриці $A(x)$. Оскільки $A(x) = B(x)C(x) = D(x)R(x)$, то

$$F_A(x) = U(x)B(x)C(x)V(x) = U(x)D(x)R(x)V(x). \tag{4}$$

Враховуючи лему 1, приходимо до висновку, що існують такі матриці $W_1(x)$, $W_2(x) \in GL_n(\mathcal{P}[x])$, що

$$U(x)B(x)W_1(x) = \operatorname{diag}(b_1(x), b_2(x), \ldots, b_n(x)) = F_B(x),$$

$$W_1^{-1}(x)C(x)V(x) = \operatorname{diag}(c_1(x), c_2(x), \ldots, c_n(x)) = F_C(x),$$

$$U(x)D(x)W_2(x) = \operatorname{diag}(d_1(x), d_2(x), \ldots, d_n(x)) = F_D(x),$$

$$W_2^{-1}(x)R(x)V(x) = \operatorname{diag}(r_1(x), r_2(x), \ldots, r_n(x)) = F_R(x).$$

Таким чином, рівність (4) рівносильна рівності $F_A(x) = F_B(x)F_C(x) = F_D(x) \times F_R(x)$. З останньої рівності випливає $b_i(x)c_i(x) = d_i(x)r_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Оскільки $(\delta_i(x), d_A(x)) = 1$, $i = 1, 2$, і $\det D(x) \mid \det B(x)$, то доведемо, що $(d_i(x), c_j(x)) = 1$ для всіх $i, j = 1, 2, \ldots, n$ за винятком $i = j = n$. Припустимо, що $(d_k(x), c_l(x)) = \alpha(x) \not\equiv 1$ для деяких $1 \le k \le n$ і $1 \le l \le n$, які одночасно не рівні n. Тоді, очевидно, $\alpha(x) \mid \det D(x)$ і $\alpha(x) \mid \det C(x)$. Оскільки $\det D(x) \mid \det B(x)$, то $\alpha(x) \mid \det B(x)$. Отже, $\alpha(x) \mid (\det B(x), \det C(x))$, тобто $\alpha(x) \mid \delta_1(x)$; крім того, k і l одночасно не рівні n, тому $\alpha(x) \mid d_A(x)$. Таким чином, ми довели, що $\alpha(x) \mid (\delta_1(x), d_A(x))$. Останнє суперечить взаємній простоті $\delta_1(x)$ і $d_A(x)$. Отже, $(d_i(x), c_j(x)) = 1$ для всіх $i, j = 1, 2, \ldots, n$ за винятком $i = j = n$. Розглянемо тепер рівності $b_i(x)c_i(x) = d_i(x)r_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Звідси маємо

$$r_i(x) = \frac{b_i(x)c_i(x)}{d_i(x)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{5}$$

Якщо ж $(d_i(x), c_i(x)) = 1$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, то з (5) випливає, що $d_i(x) \mid b_i(x)$, $1 \le i < n$, тобто $b_i(x) = d_i(x)q_i(x)$, $i < n$. І оскільки $\det D(x) \mid \det B(x)$, то покладемо $\det B(x) = \det D(x)\, q(x)$. Із останньої рівності в силу викладеного вище одержуємо

$$q_1(x) = q_1(x)\,q_2(x) \ldots q_{n-1}(x)\frac{b_n(x)}{d_n(x)}. \tag{6}$$

Врахувавши, що при $i < n$ $(c_i(x), d_i(x)) = 1$, з (5) маємо $r_i(x) = q_i(x)\,c_i(x)$ для всіх $i < n$. Оскільки $(d_n(x), c_i(x)) = 1$ і $(r_i(x), d_n(x)) = 1$ при $i < n$, то, приймаючи до уваги представлення $r_i(x)$, $i < n$, одержуємо $(d_n(x), q_i(x)) = 1$ для всіх $i < n$. Внаслідок останнього з (6) випливає, що $d_n(x) \mid b_n(x)$, тобто $b_n(x) = d_n(x)\,q_n(x)$. Отже,

$$F_B(x) = F_D(x)\operatorname{diag}(q_1(x), q_2(x), \ldots, q_n(x)). \tag{7}$$

Помноживши рівність (7) зліва на $U^{-1}(x)$, а справа на $W_1^{-1}(x)$, маємо $B(x) = U^{-1}(x)F_D(x)\operatorname{diag}(q_1(x), q_2(x), \ldots, q_n(x))W_1^{-1}(x)$. Але останню рівність внаслідок $D(x) = U^{-1}(x)F_D(x)W_2^{-1}(x)$ можемо записати у вигляді

$$B(x) = U^{-1}(x)F_D(x)W_2^{-1}(x)W_2(x)\operatorname{diag}(q_1(x), (q_2(x) \ldots, q_n(x))W_2^{-1}(x) =$$

$$= D(x)W_2(x)\operatorname{diag}(q_1(x), q_2(x), \ldots, q_n(x))W_2^{-1}(x) = D(x)Q(x),$$

де $Q(x) = W_2(x)\operatorname{diag}(q_1(x), (q_2(x) \ldots, q_n(x))W_2^{-1}(x)$. Отже, $D(x)$ ділить $B(x)$ зліва. Лема доведена.

Наслідок 4. *Нехай матриця $A(x) \in \mathcal{P}_n[x]$, $\det A(x) \not\equiv 0$, елементарні дільники якої попарно взаємно прості, зображена у вигляді $A(x) = B(x)C(x) = D(x)R(x)$, $B(x), D(x) \in \mathcal{P}_n[x]$. Якщо $\det D(x) \mid \det B(x)$, то матриця $B(x)$ ділиться зліва на матрицю $D(x)$, тобто $B(x) = D(x)Q(x)$ і $R(x) = Q(x)C(x)$.*

Теорема 1. *Нехай матричний многочлен $A(x) = A_0x^s + A_1x^{s-1} + \ldots + A_s$, $A_i \in \mathcal{P}_n$, $i = 0, 1, \ldots, n$, $\deg\det A(x) \geq n$, допускає зображення у вигляді $A(x) = D(x)C(x)$, де $D(x) = Ix^r - D_1x^{r-1} - \ldots - D_r$, $D_j \in \mathcal{P}_n$, $j = 1, \ldots, r$, — унітальний матричний многочлен степеня r з характеристичним многочленом $\det D(x) = d(x) = x^{rn} + d_1x^{rn-1} + \ldots + d_{rn}$, і $\det C(x) = c(x)$. Якщо $(d(x), c(x), d_A(x)) = 1$, де $d_A(x)$ — н. с. д. мінорів $(n-1)$-го порядку матриці $A(x)$, то унітальний дільник $D(x)$ степеня r матричного многочлена $A(x)$ однозначно визначається своїм характеристичним многочленом $d(x)$.*

Доведення. Припустимо, що для матричного многочлена $A(x)$ крім факторизації $A(x) = D(x)C(x)$ існує факторизація вигляду $A(x) = \overline{D}(x)\overline{C}(x)$, де $\overline{D}(x)$ — унітальний матричний многочлен степеня r з характеристичним многочленом $d(x)$, причому $D(x) \neq \overline{D}(x)$. Оскільки $D(x)C(x) = \overline{D}(x)\overline{C}(x)$, причому $\det\overline{C}(x) = c(x)$ і $(d(x), c(x), d_A(x)) = 1$, то внаслідок леми 2 матриця $\overline{D}(x)$ є лівим дільником матриці $D(x)$, тобто $D(x) = \overline{D}(x)\,Q(x)$. А тому що $D(x)$ і $\overline{D}(x)$ — унітальні матричні многочлени одного і того ж степеня r, то з останньої рівності одержуємо $Q(x) \equiv I$. Отже, $D(x) = \overline{D}(x)$. Тим самим доведено, що за умов теореми унітальний дільник $D(x)$ степеня r однозначно визначається своїм характеристичним многочленом $d(x)$. Теорема доведена.

Із теореми випливають такі наслідки.

***Наслідок* 5.** *Нехай матричний многочлен* $A(x) = A_0 x^s + A_1 x^{s-1} + \ldots + A_s$, $A_i \in \mathcal{P}_n$, $i = 0, 1, \ldots, s$, $\deg \det A(x) \geq n$, *допускає зображення* $A(x) = D(x)C(x)$, *де* $D(x)$ — *унітальний матричний многочлен степеня* r *з характеристичним многочленом* $\det D(x) = d(x)$, $\deg d(x) = nr$ *і* $\det C(x) = c(x)$. *Якщо* $(d(x), c(x)) = 1$, *то унітальний дільник* $D(x)$ *степеня* r *однозначно визначається своїм характеристичним многочленом* $d(x)$.

***Наслідок* 6.** *Нехай матричний многочлен* $A(x) = A_0 x^s + A_1 x^{s-1} + \ldots + A_s$, $A_i \in \mathcal{P}_n$, $i = 0, 1, \ldots, s$, $\deg \det A(x) \geq n$, *елементарні дільники якого попарно взаємно прості, допускає зображення* $A(x) = D(x)C(x)$, *де* $D(x)$ — *унітальний матричний многочлен степеня* r *з характеристичним многочленом* $\det D(x) = d(x)$, $\deg d(x) = nr$. *Тоді* $D(x)$ — *єдиний лівий унітальний дільник степеня* r *з заданим характеристичним многочленом* $d(x)$ *матричного многочлена* $A(x)$.

Відомо [5], що задача про знаходження лівого унітального лінійного дільника $D(x) = Ix - D$, $D \in \mathcal{P}_n$, матричного многочлена $A(x) = A_0 x^s + A_1 x^{s-1} + \ldots + A_s$, $A_i \in \mathcal{P}_n$, $i = 0, 1, \ldots, s$, рівносильна розв'язності матричного многочленного рівняння

$$X^s A_0 + X^{s-1} A_1 + \ldots + X A_{s-1} + A_s = 0,$$

де X — невідома $n \times n$-матриця. Враховуючи теорему 1, одержуємо таку теорему.

Теорема 2. *Нехай матриця* $D \in \mathcal{P}_n$ *з характеристичним многочленом* $\det(Ix - D) = d(x)$ *є розв'язком матричного многочленного рівняння* $X^s A_0 + X^{s-1} A_1 + \ldots + X A_{s-1} + A_s = 0$. *Якщо* $\left(d(x), \det A(x)/d(x), d_A(x)\right) = 1$, *то цей розв'язок однозначно визначається характеристичним многочленом* $d(x)$ *матриці* D.

Очевидно, що аналогічний результат справедливий і для матричного многочленного рівняння $A_0 X^s + A_1 X^{s-1} + \ldots + A_{s-1} X + A_s = 0$.

1. *Грига Б. С., Казимирский П. С.* К вопросу единственности выделения унитального множителя из матричного многочлена // Теоретические и прикладные вопросы алгебры и дифференциальных уравнений. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1976. – С. 15–18.
2 *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1966. – 576 с.
3. *Newman M.* Integral matrices. – New York: Acad. Press, 1972. – 244 p.
4. *Петричкович В. М.* О полускалярной эквивалентности и нормальной форме Смита многочленных матриц // Мат. методы и физ.–мех. поля. – 1987. –Вып. 26. – С. 13–16.
5. *Ingraham M. H.* Rational methods in matrix equations // Bull. Amer. Math. Soc. – 1941. – **47**. – P. 61–70.

Одержано 30.03.92