# Применение метода усреднения к решению смешанных задач для нелинейных гиперболических уравнений

С. А. Василишин

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - Lu = \varepsilon F(t, x, u, u'_t, u'_x), \tag{1}$$

где $Lu = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) - a(x)u$; его коэффициенты определены в конечной связной области $D$ изменения $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и удовлетворяют в $\bar{D}$ условиям:

$$a(x) \geqslant 0,\ a_{ij} = a_{ji},\ \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \geqslant \alpha \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2,\ \alpha = \mathrm{const},$$

$\varepsilon$ — малый параметр, а $F$ — периодическая функция времени периода $T$.

Для уравнения (1) ставится смешанная задача: найти дважды непрерывно дифференцируемую функцию $u(t,x)$ в области $D \times (0 \leqslant t \leqslant T)$, удовлетворяющую уравнению (1) при начальных условиях

$$u\Big|_{t=0} = \varphi(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x) \tag{2}$$

и граничному условию

$$u|_S = 0, \tag{3}$$

где $S$ — граница области $D$.

Для нахождения приближенного решения этой задачи используются методы Фурье и усреднения.

Такая задача для частных видов уравнения (1) решалась в работах [1—4] без обоснования применения метода Фурье. Обоснование метода Фурье для указанной задачи приведено в работе [5]. В этой работе доказано, что при малом $\varepsilon$ и определенных условиях, наложенных на функции $F$, $\varphi$, $\psi$, существует единственное решение задачи (1) — (3), имеющее вид

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\, v_k(x), \tag{4}$$

где $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ — собственные функции задачи

$$\begin{gathered} Lv + \lambda^2 v = 0, \\ u|_S = 0, \end{gathered} \tag{5}$$

образующие ортогональную в области $D$ систему.

Подставляя (4) в уравнение (1), умножая результат подстановки на $v_m$, интегрируя полученное равенство по области $D$ и принимая во внимание ортогональность системы $\{v_m\}$, получаем для определения $u_m(t)$ $(m = 1, 2, \ldots)$ счетную систему дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2u_m}{dt^2} + \omega_m^2 u_m = \varepsilon\Phi_m(t, \; u_1, \; u_2, \ldots; u_1', \; u_2', \ldots), \tag{6}$$

где $\Phi_m$ — нелинейные функции своих аргументов. Начальные условия для функций $u_m$ принимают вид

$$u_m\Big|_{t=0} = \varphi_m, \quad \frac{du_m}{dt}\Big|_{t=0} = \psi_m, \tag{7}$$

где

$$\varphi_m = \frac{\int\limits_D \varphi(x)\, v_m(x)\, dx}{\int\limits_D v_m^2(x)\, dx}, \quad \psi_m = \frac{\int\limits_D \psi(x)\, v_m(x)\, dx}{\int\limits_D v_m^2(x)\, dx} \quad (m = 1, 2, \ldots).$$

Таким образом, исходная задача сведена к задаче (6), (7), решение которой ищется методом усреднения, изложенным в монографии Н. Н. Боголюбова, Ю. А. Митропольского (6).

С этой целью в уравнении (6) произведем замену

$$\begin{aligned} u_m &= w_m e^{i\omega_m t} + w_{-m} e^{-i\omega_m t}, \\ \dot{u}_m &= i\omega_m w_m e^{i\omega_m t} - i\omega_m w_{-m} e^{-i\omega_m t}, \end{aligned} \tag{8}$$

где $w_m$ и $w_{-m}$ — комплексно сопряженные неизвестные медленно меняющиеся функции времени. Тогда для определения $w_m$ и $w_{-m}$ получаем счетную систему дифференциальных уравнений первого порядка в стандартной форме:

$$\begin{aligned} \frac{dw_m}{dt} &= \varepsilon \frac{e^{-i\omega_m t}}{2i\omega_m} \Phi_m(t, \; w_1, \; w_2, \ldots, w_{-1}, \; w_{-2}, \ldots), \\ \frac{dw_{-m}}{dt} &= -\varepsilon \frac{e^{i\omega_m t}}{2i\omega_m} \Phi_m(t, \; w_1, \; w_2, \ldots, w_{-1}, \; w_{-2}) \; (m = 1, \; 2, \ldots). \end{aligned} \tag{9}$$

Начальные условия (7) при этом преобразуются к виду:

$$\begin{aligned} w_m|_{t=0} &= \frac{1}{2}\varphi_m - \frac{i}{2m}\psi_m, \\ w_{-m}|_{t=0} &= \frac{1}{2}\varphi_m + \frac{i}{2m}\psi_m \quad (m = 1, \; 2, \ldots). \end{aligned} \tag{10}$$

Уравнения первого приближения получаются из уравнений (9) путем усреднения правых частей (9) по явно входящему времени и имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_m}{dt} &= \varepsilon \underset{t}{M} \left\{ \frac{e^{-i\omega_m t}}{2i\omega_m} \Phi_m(t, \; \xi_1, \; \xi_2, \ldots, \xi_{-1}, \; \xi_{-2}, \ldots) \right\}, \\ \frac{d\xi_{-m}}{dt} &= -\varepsilon \underset{t}{M} \left\{ \frac{e^{i\omega_m t}}{2i\omega_m} \Phi_m(t, \; \xi_1, \; \xi_2, \ldots, \xi_{-1}, \; \xi_{-2}, \ldots) \right\} \quad (m = 1, \; 2, \ldots). \end{aligned} \tag{11}$$

Начальные условия остаются прежними:

$$\xi_m|_{t=0} = \frac{1}{2}\varphi_m - \frac{i}{2m}\psi_m,$$

$$\xi_{-m}|_{t=0} = \frac{1}{2}\varphi_m + \frac{i}{2m}\psi_m \quad (m = 1, 2, \ldots). \tag{12}$$

Решение задачи (11), (12) дает первое приближение задачи (9), (10). Приближенный метод решения этой задачи указан в работе [7].

С помощью метода усреднения можно получить и приближения высших порядков.

Указанным способом может быть найдено решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = \varepsilon f(t, x, u, u'_x, u'_t, u''_{xx}) \tag{13}$$

при начальных условиях

$$u\Big|_{t=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(t) \tag{14}$$

и граничных условиях вида

$$u(t, 0) = u(t, l) = u''_{xx}(t, 0) = u''_{xx}(t, l) = 0. \tag{15}$$

Достаточные условия существования и единственности классического решения вида

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin\frac{k\pi x}{l} \tag{16}$$

этой задачи даны в работе [8].

В качестве примера рассмотрим следующее интегро-дифференциальное уравнение поперечных колебаний стержня [9]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{EI}{\mu}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = \frac{1}{2}\frac{EF}{\mu l}\int\limits_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{17}$$

где $l$ — длина стержня, $\mu = \varrho F$ — масса единицы длины стержня, $F$ — площадь поперечного сечения, $E$ — модуль упругости материала, $I$ — осевой момент инерции поперечного сечения стержня. $EI$ — изгибная жесткость стержня.

Пусть оба конца стержня шарнирно оперты; тогда граничные условия будут иметь вид

$$u(t, 0) = (t, l) = u''_{xx}(t, 0) = u''_{xx}(t, l) = 0. \tag{18}$$

Возьмем начальные условия следующего вида:

$$u(0, x) = c\frac{2^{10}}{l^{10}} x^5 (l - x)^5,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0, \tag{19}$$

где $c = u\left(0, \frac{l}{2}\right)$.

Решение задачи (17) — (19) будем искать в виде (16). Тогда для определения $u_m(t)$ получаем систему уравнений

$$\frac{d^2u_m}{dt^2}+\frac{\pi^4EIm^4}{\mu l^4}u_m=-\frac{\pi^4EF}{4\mu l^4}m^2\sum_{k=1}^{\infty}k^2u_k^2u_m \qquad (m=1,\ 2,\ldots). \tag{20}$$

Находим правые части начальных условий (7):

$$\varphi_m=c\frac{2^{11}}{l^{11}}\int_0^l x^5(l-x)^5\,dx=$$

$$=\begin{cases} c\dfrac{2^{12}\cdot5\cdot6!}{\pi^7(2s-1)^7}\left[1-\dfrac{112}{\pi^2(2s-1)^2}+\dfrac{1008}{\pi^4(2s-1)^4}\right] \text{ при } m=2s-1,\\ 0 \text{ при } m=2s\ (s=1,\ 2,\ldots),\ \psi_m=0\ (m=1,\ 2,\ldots).\end{cases}$$

Проводя замену (8) в системе (20), преобразуем ее к стандартной форме:

$$\frac{dw_m}{dt}=-\frac{\pi^4EFm^2}{8\mu l^4 i\omega_m}e^{-i\omega_m t}\sum_{k=1}^{\infty}k^2\left(w_k e^{i\omega_k t}+w_{-k}e^{-i\omega_k t}\right)^2\left(w_m e^{i\omega_m t}+\right.$$

$$\left.+w_{-m}e^{-i\omega_m t}\right),$$

$$\frac{dw_{-m}}{dt}=\frac{\pi^4EFm^2}{8\mu l^4 i\omega_m}e^{i\omega_m t}\sum_{k=1}^{\infty}k^2\left(w_k e^{i\omega_k t}+w_{-k}e^{-i\omega_k t}\right)^2\left(w_m e^{i\omega_m t}+\right.$$

$$\left.+w_{-m}e^{-i\omega_m t}\right),$$

где

$$\omega_m=\frac{\pi^2\sqrt{EI}\,m^2}{\sqrt{\mu l^2}}\quad (m=1,\ 2,\ldots).$$

Применяя метод усреднения к этой системе, получим:

$$\frac{d\xi_m}{dt}=\frac{i\pi^2\sqrt{E}F}{8\sqrt{\mu}l^2\sqrt{I}}\xi_m\left(m^2\xi_m\xi_{-m}+2\sum_{k=1}^{\infty}k^2\xi_k\xi_{-k}\right),$$

$$\frac{d\xi_{-m}}{dt}=-\frac{i\pi^2\sqrt{E}F}{8\sqrt{\mu}l^2\sqrt{I}}\xi_{-m}\left(m^2\xi_m\xi_{-m}+2\sum_{k=1}^{\infty}k^2\xi_k\xi_{-k}\right)(m=1,\ 2,\ldots). \tag{21}$$

Начальные условия (12) в данном случае запишутся так:

$$\xi_m(0)=\xi_{-m}(0)=\begin{cases} c\dfrac{2^{12}\cdot5\cdot6!}{\pi^7(2s-1)^7}\left[1-\dfrac{112}{\pi^2(2s-1)^2}+\dfrac{1008}{\pi^4(2s-1)^4}\right]\\ \qquad\qquad \text{при } m=2s-1,\\ 0 \qquad\qquad \text{при } m=2s\ (s=1,\ 2,\ldots).\end{cases} \tag{22}$$

Из системы (21) при любом $m$ получается соотношение

$$\xi_{-m}\frac{d\xi_m}{dt}=-\xi_m\frac{d\xi_{-m}}{dt},$$

интегрируя которое получаем:

$$\xi_m(t)\,\xi_{-m}(t) = \xi_m(0)\,\xi_{-m}(0).$$

Учитывая эти условия, преобразуем систему (21) к виду:

$$\frac{d\xi_{2s}}{dt} = 0, \quad \frac{d\xi_{-2s}}{dt} = 0,$$

$$\frac{d\xi_{2s-1}}{dt} = \frac{i\pi^2\sqrt{EF}}{8\sqrt{\mu}\,l^2\sqrt{l}}\left((2s-1)^2{}_{2s-1}(0) + 2\sum_{k=1}^{\infty}(2k-1)^2\,\xi_{2k-1}^2(0)\right)\xi_{2s-1},$$

$$\frac{d\xi_{-(2s-1)}}{dt} = -\frac{i\pi^2\sqrt{EF}}{8\sqrt{\mu}\,l^2\sqrt{l}}\left((2s-1)^2\,\xi_{2s-1}^2(0) + 2\sum_{k=1}^{\infty}(2k-1)^2\xi_{2k-1}^2(0)\right)\xi_{-(2s-1)} \qquad (23)$$

$$(s = 1,\ 2, \ldots).$$

Решение задачи (23), (22) имеет следующий вид:

$$\xi_{2s} = 0, \quad \xi_{-2s} = 0.$$

$$\xi_{2s-1} = \xi_{2s-1}(0)\,e^{i\frac{\pi^2\sqrt{EF}}{8\sqrt{\mu}\,l^2\sqrt{l}}\left((2s-1)^2\xi_{2s-1}^2(0)+2\sum\limits_{k=1}^{\infty}(2k-1)^2\xi_{2k-1}^2(0)\right)t},$$

$$\xi_{-(2s-1)} = \xi_{2s-1}(0)\,e^{-i\frac{\pi^2\sqrt{EF}}{8\sqrt{\mu}\,l^2\sqrt{l}}\left((2s-1)^2\xi_{2s-1}^2(0)+2\sum\limits_{k=1}^{\infty}(2k-1)^2\xi_{2k-1}^2(0)\right)t}$$

$$(s = 1,\ 2, \ldots).$$

Тогда первое приближение решения исходной задачи (17) — (19) имеет вид

$$\tilde{u}(t,\ x) = \sum_{s=1}^{\infty}\xi_{2s-1}(0)\cos\left[\frac{\pi^2\sqrt{EF}}{8\sqrt{\mu}\,l^2\sqrt{l}}\left((2s-1)^2\,\xi_{2s-1}^2(0) + {}\right.\right.$$

$$\left.\left. + 2\sum_{k=1}^{\infty}(2k-1)^2\,\xi_{2k-1}^2(0)\right) + \frac{\pi^2\sqrt{E}\,l\,(2s-1)^2}{\sqrt{\mu}\,l^2}\right]\sin\frac{(2s-1)\,\pi x}{l},$$

где $\xi_m(0)\ (m = 1,\ 2, \ldots)$ определяется по формуле (22).

## ЛИТЕРАТУРА


1. Ю. А. Митропольский, Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний, Изд-во «Наука», М., 1964.
2. З. Ф. Сирченко, Применение метода усреднения к решению уравнений в частных производных, УМЖ, т. XIV, № 2, 1962.
3. А. Г. Илюхин, Приближенный метод решения смешанной задачи для нелинейного уравнения в частных производных гиперболического типа, содержащего малый параметр, УМЖ, т. XIV, № 3, 1962.
4. Д. Дж. Бенни, А. М. Нил, Кажущиеся резонансы слабо нелинейных стоячих волн, Механика, Периодич. сб. перев. иностран. ст., 1, 1964.
5. А. И. Гусейнов, К. К. Гасанов, О применимости метода Фурье к решению смешанной задачи для одного класса квазилинейных гиперболических уравнений, ДАН СССР, т. 148, № 4, 1963.
6. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, М., 1958.

7. О. А. Жаутыков, О применении метода усреднения к решению одного уравнения в теории колебаний, Сб. «Приближенные методы решения дифференциальных уравнений», вып. 2, Изд-во «Наукова Думка», К., 1964.
8. К. И. Худовердиев, Применение метода Фурье к решению смешанной задачи для одного класса нелинейных уравнений четвертого порядка, Уч. зап. АГУ им. С. М. Кирова, сер. физ.-матем. и хим. наук, № 4, 1961.
9. Г. Каудерер, Нелинейная механика, ИЛ, М., 1961.

Поступила 11.X 1965 г.
Киев