Обратная задача для уравнений квантовой механики с энергозависящими потенциалами

В. И. Мальчёнко

В ряде появившихся недавно работ рассматривается рассеяние элементарных частиц энергозависящими потенциалами [1—4]. В связи с такой постановкой задачи естественно рассмотреть соответствующую обратную задачу, т. е. задачу об определении потенциала по данным рассеяния. Поскольку во всех существующих методах имеют дело с энергонезависящими потенциалами [5, 6], то ясно, что в данном случае необходим новый подход.

Ниже будет построена схема, пригодная для восстановления потенциала по амплитуде рассеяния как в рамках релятивистской квантовой механики, так и в квазиоптическом подходе.

Обозначим через s квадрат полной энергии рассеивающихся частиц и в дальнейшем будем предполагать, что, начиная с некоторого значения $s_0 > m^2$, соответствующего порогу неупругих процессов, потенциал $c(s, \vec{x})$ становится комплексным. Свойства такого потенциала до некоторой степени можно определить, исходя из условия причинности и из требования, чтобы полный поток частиц не возрастал [4]. Это приводит к тому, что:

а) $c(s, \vec{x})$ при фиксированных $\vec{x}$ является регулярной функцией в s-плоскости с разрезом вдоль вещественной положительной оси от s_0 до ∞;

б) для $s > s_0$ и при всех $\vec{x}$ $\operatorname{Im} c(s + i0, \vec{x}) \leqslant 0$.

Кроме этого, предположим, что $c(s, \vec{x})$ не зависит от массы частицы m и при фиксированных s из области регулярности выполняются неравенства:

в) $|c(s, \vec{x})| \leqslant N_s v(x)$, $\int\limits_0^\infty x^k v(x)\, dx < \infty$ $\quad (k = 1, 2)$, где N_s — некоторая зависящая от s константа.

Рассмотрим сначала обратную задачу для уравнения Клейна — Гордона

$$(\Delta + s - m^2)\varphi(\vec{x}) = gc(s, \vec{x})\varphi(\vec{x}). \tag{1}$$

Амплитуда рассеяния $f(s, \vec{\sigma})$ ($\vec{\sigma}$ — переданный импульс) в этом случае имеет вид [7]

$$f(s, \vec{\sigma}) = \frac{-g}{4\pi}\int d\vec{x}\, c(s, \vec{x})\, e^{-i\vec{\sigma}\vec{x}} - \frac{g}{4\pi}\int d\vec{r}d\vec{R}c\left(s, \vec{R}+\frac{\vec{r}}{2}\right) K\left(s, m; R + \frac{\vec{r}}{2}, R - \frac{\vec{r}}{2}\right)\exp\left[-i\left(s - m^2 - \frac{\sigma^2}{4}\right)^{1/2}\vec{r}\vec{\varrho}^0 - i\vec{\sigma}\vec{R}\right] -$$
$$- \frac{g}{4\pi}\int d\vec{r}d\vec{R}c\left(s, \vec{R}+\frac{\vec{r}}{2}\right) H\left(s, m; \vec{R}+\frac{\vec{r}}{2}, \vec{R}-\frac{\vec{r}}{2}\right)\exp\left[-i\left(s - m^2 - \frac{\sigma^2}{4}\right)^{1/2}\vec{r}\vec{\varrho}^0 - i\vec{\sigma}\vec{R}\right] - \frac{g}{4\pi}\int d\vec{z}d\vec{r}d\vec{R}c\left(s, \vec{R}+\frac{\vec{r}}{2}\right) H\left(s, m; R+\frac{r}{2}, \vec{z}\right)\times$$
$$\times K\left(s, m; \vec{z}, \vec{R}-\frac{\vec{r}}{2}\right)\exp\left[-i\left(s - m^2 - \frac{\sigma^2}{4}\right)^{1/2}\vec{r}\vec{\varrho}^0 - i\vec{\sigma}\vec{R}\right], \tag{2}$$

где $\vec{\varrho}^0$ — некоторый единичный вектор,

$$K(s, m; \vec{x}, \vec{y}) = \frac{-1}{4\pi}\cdot\frac{e^{i\sqrt{s-m^2}|\vec{x}-\vec{y}|}}{|\vec{x}-\vec{y}|}\, gc(s, \vec{y}) \tag{3}$$

и $H(s, m; \vec{x}, \vec{y})$ — резольвента.

Из условия б) следует, что дискретный спектр собственных значений s весь сосредоточен, как и в случае вещественного энергонезависящего потенциала, на отрезке $[0, m^2]$ [4]. Таким образом, при $s > m^2 + \sigma^2/4$ для определения резольвенты можно воспользоваться представлением $H(s, m; \vec{x}, \vec{y}) = N(s, m; \vec{x}, \vec{y})/D(s, m)$, где N и D — числитель и знаменатель Фредгольма, обычным образом выраженные через итерированное ядро $K_2(s, m; \vec{x}, \vec{y})$. Мы видим, что в области $s > m^2 + \sigma^2/4$ равенство (2) определяет физическую амплитуду рассеяния не только как функцию s и $\vec{\sigma}$, но и как функцию массы m: $f(s, \vec{\sigma}, m)$.

Зафиксируем s из области

$$m^2 + \sigma^2/4 < s < s_1 \tag{4}$$

и, исходя из (2), построим, пока чисто формально, функцию

$$f(s, \vec{\sigma}, i\gamma) \qquad (\gamma > 0,\ \sigma < 2\gamma). \tag{5}$$

Легко видеть, что, по крайней мере, при достаточно больших γ такое построение имеет смысл. Для определения резольвенты $H(s, i\gamma; \vec{x}, \vec{y})$ в этом случае проще всего воспользоваться разложением

$$H(s, i\gamma; \vec{x}, \vec{y}) = K_2(s, i\gamma; \vec{x}, \vec{y}) + \ldots + K_{2n}(s, i\gamma; \vec{x}, \vec{y}) + \ldots, \tag{6}$$

где

$$K_2(s, i\gamma; \vec{x}, \vec{y}) = \int d\vec{z}\,\frac{gc(s, \vec{z})}{16\pi^2}\exp[i\sqrt{s+\gamma^2}(|\vec{x}-\vec{z}| + |\vec{z}-\vec{y}|)]\, gc(s, \vec{y}),$$

$$K_{2n}(s,\ i\gamma;\ \vec{x},\ \vec{y}) = \int d\vec{z}_1 \ldots d\vec{z}_{n-1} K_2(s,\ i\gamma;\ \vec{x},\ \vec{z}_1) K_2(s,\ i\gamma;\ \vec{z}_1,$$

$$\vec{z}_2) \ldots K_2(s,\ i\gamma;\ \vec{z}_{n-1},\ \vec{y})\ (n = 2,\ 3,\ \ldots).$$

При $\gamma \to \infty$ для рассматриваемых здесь потенциалов $K_2(s,\ i\gamma;\ \vec{x},\ \vec{y})\, 4\pi y/v(y)$ исчезает [5]. Поэтому, учитывая условие в), находим, что при больших γ

$$|K_{2n}(s,\ i\gamma;\ \vec{x},\ \vec{y})| < \varepsilon^{2n}(gAN_s)^{2n}\, v(y)/4\pi y \qquad (n = 1,\ 2,\ \ldots),$$

где A — некоторая константа, а $\varepsilon \to 0$ при $\gamma \to \infty$. Исходя из (6) и учитывая последнее неравенство, получаем, что при больших γ

$$|H(s,\ i\gamma;\ \vec{x},\ \vec{y})| < \varepsilon^2 (gAN_s)^2 (1 + (gAN_s)^2 \varepsilon^2 + (gAN_s)^4 \varepsilon^4 + \ldots) \frac{v(y)}{4\pi g}. \tag{7}$$

Таким образом, начиная с накоторого значения γ, резольвента $H(s,\ i\gamma;\ \vec{x},\ \vec{y})$ может быть представлена разложением (6), что вместе с (2) и определяет функцию (5). Теперь уже легко показать, что

$$\lim_{\gamma \to \infty,\ \sigma < 2\gamma} f(s,\ \vec{\sigma},\ i\gamma) = -\frac{g}{4\pi} \int d\vec{x} c(s,\ \vec{x}) e^{-i\vec{\sigma}\vec{x}}. \tag{8}$$

Действительно, полагая в (2) $m = i\gamma$, находим, что при $\gamma \to \infty$ второе слагаемое исчезает почти всюду на основании леммы Римана — Лебега, а третье и четвертое слагаемые обращаются в нуль вследствие (7).

Соотношение (8) позволяет решить обратную задачу для уравнения (1). Из (8) можно найти $c(s,\ \vec{x})$ для вещественных s из области (4) и затем осуществить аналитическое продолжение на все s. Поскольку приведенное выше построение функции $f(s,\ \vec{\sigma}\ i\gamma)$ по физической амплитуде рассеяния осуществляется однозначно, то обратная задача в данном случае имеет единственное решение. Аналогичное рассмотрение может быть проведено и для уравнения Дирака.

Рассмотрим еще обратную задачу для квазиоптического подхода в теории поля.

В этом случае амплитуда рассеяния $F(s,\ \vec{\sigma},\ m)$ получается из представления (2) в результате замены ядра $K(s,\ m;\ \vec{x},\ \vec{y})$ функцией

$$G(s,\ m;\ \vec{x},\ \vec{y}) = \frac{-1}{4\pi^2 |\vec{x} - \vec{y}|} \int_0^\infty \frac{dz}{\sqrt{z}} \frac{e^{i\sqrt{s-m^2}\,|\vec{x}-\vec{y}|} - e^{-\sqrt{z+m^2}\,|\vec{x}-\vec{y}|}}{s+z} gc(s,\ y), \tag{9}$$

причем дискретный спектр собственных значений s по-прежнему весь сосредоточен на отрезке $[0,\ m^2]$ (см. [3]).

Используя вытянутые сфероидальные координаты [5, 8], можно показать, что

$$\frac{4\pi y}{v(y)} G_2(s,\ i\gamma;\ \vec{x},\ \vec{y}) = \frac{4\pi y}{v(y)} \int G(s,\ i\gamma;\ \vec{x}.\ \vec{z}) G(s,\ i\gamma;\ \vec{z},\ \vec{y}) d\vec{z}$$

исчезает при $\gamma \to \infty$, так что и в этом случае для достаточно больших γ резольвента может быть представлена в виде разложения, аналогичного (6). Это позволяет, так же как и выше, исходя из физической амплитуды рассеяния $F(s, \vec{\sigma}, m)$, построить функцию $F(s, \vec{\sigma}, i\gamma)$ и показать, что

$$\lim_{\gamma \to \infty,\ \sigma < 2\gamma} F(s, \vec{\sigma}, i\gamma) = -\frac{g}{4\pi} \int d\vec{x} c(s, \vec{x}) e^{-i\vec{\sigma}\vec{x}},$$

если s принадлежит (4).

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Логунов, А. Н. Тавхелидзе, Предпринты ОИЯИ. Е—1145, Д—1191, Д—1195.
2. О. И. Завьялов, М. К. Поливанов, С. С. Хоружий, ЖЭТФ, т. 45, 1963, 1959.
3. М. К. Поливанов, С. С. Хоружий, ЖЭТФ, т. 46, 1964, 352.
4. J. Gornwall, M. Ruderman, Phys. Rev., 28, 1962, 1474.
5. Ю. М. Березанский, Тр. Моск. матем. о-ва, 7, 1958.
6. Л. Д. Фадеев, УМН, т. 14, вып. 4 (58), 1959.
7. В. И. Мальченко, УМЖ, т XI, 1959, 256.
8. Л. Д. Фадеев, Вестник ЛГУ, сер. матем., мех. и астр., 7, 1957.

Поступила 1. IV 1965 г.
Днепропетровск