УДК 519.41/47

В. А. Онищук, асп., **Я. П. Сысак**, канд. физ.-мат. наук
(Ин-т математики АН Украины, Киев)

Локально нильпотентные группы, удовлетворяющие слабому условию минимальности или максимальности для подгрупп фиксированной ступени нильпотентности

Изучаются локально нильпотентные группы, содержащие нильпотентные подгруппы ступени нильпотентности c, $c > 1$, и удовлетворяющие слабому условию минимальности или максимальности для подгрупп ступени нильпотентности c. Показано, что нильпотентные группы такого рода минимаксны, а локально нильпотентные периодические группы — черниковские. Также показано, что если в нильпотентной или локально нильпотентной периодической группе G все нильпотентные подгруппы ступени нильпотентности c имеют конечные ранги, то группа G имеет конечный ранг. Доказано, что в случае, когда G — непериодическая локально нильпотентная группа, аналогичные результаты не имеют места.

Вивчаються локально нільпотентні групи, які містять нільпотентні підгрупи ступеня нільпотентності c, $c > 1$, і задовольняють слабку умову мінімальності або максимальності для підгруп ступеня нільпотентності c. Показано, що нільпотентні групи такого роду мінімаксні, а локально нільпотентні періодичні групи — черніковські. Також показано, що якщо в нільпотентній або локально нільпотентній періодичній групі G всі нільпотентні підгрупи ступеня нільпотентності c мають скінченні ранги, то група G має скінченний ранг. Доведено, що у випадку, коли G — неперіодична локально нільпотентна група, аналогічні результати не мають місця.

Пусть X — произвольное семейство подгрупп некоторой группы. Будем говорить, что группа G удовлетворяет слабому условию минимальности (максимальности) для X-подгрупп, если в ней не существует бесконечно убывающей (возрастающей) цепочки X-подгрупп

$$G_1 > G_2 > \ldots > G_k > \ldots \ (G_1 < G_2 < \ldots < G_k < \ldots),$$

для которой индексы $|G_k : G_{k+1}|$ бесконечны для всех натуральных чисел k.

Слабые условия минимальности и максимальности для подгрупп ввел в рассмотрение Д. И. Зайцев [1]. В работе [2] показано, что при некоторых дополнительных ограничениях группы с такими условиями минимаксны, т. е. имеют конечный субнормальный ряд, каждый фактор которого удовлетворяет условию минимальности или максимальности для подгрупп.

Следуя [2], будем употреблять для обозначения обычного условия минимальности символ min (максимальности — max), для слабого условия минимальности символ min — ∞ (для слабого условия максимальности символ max — ∞). С этой же целью введем аналогичные обозначения: min — c (max — c) — условие минимальности (максимальности) для подгрупп ступени нильпотентности c, $c > 0$, min — c — ∞ (max — c — ∞) — слабое условие минимальности (максимальности) для подгрупп ступени c, $c > 0$.

Д. И. Зайцев [3, 4] показал, что локально нильпотентные группы, содержащие подгруппы ступени нильпотентности c и удовлетворяющие условию $\min - c$, являются черниковскими, т. е. почти абелевыми с условием минимальности для подгрупп. В работе [5] им было показано, что локально нильпотентные группы со слабым условием минимальности или максимальности для абелевых подгрупп (нильпотентных групп ступени нильпотентности $c = 1$) минимаксны.

В настоящей работе рассматриваются локально нильпотентные группы, содержащие нильпотентные подгруппы ступени нильпотентности c и удовлетворяющие условию $\min - c - \infty$ или $\max - c - \infty$ при $c > 1$. Показано, что нильпотентные группы с таким условием минимаксны (теорема 1), а локально нильпотентные периодические группы — черниковские (теорема 2). Кроме того показано, что если в нильпотентной или локально нильпотентной периодической группе G, содержащей нильпотентную подгруппу ступени c, все подгруппы ступени c имеют конечные ранги, то группа G имеет конечный ранг. Однако для произвольных локально нильпотентных групп аналогичные результаты не имеют места. Доказано (теорема 3), что существуют локально нильпотентные группы без кручения бесконечного ранга, у которых каждая нильпотентная подгруппа ступени нильпотентности c является конечнопорожденной группой ранга не выше $2c$. В частности, в таких группах выполняются условия $\min - c - \infty$ и $\max - c - \infty$ (даже $\max - c$), но сами они не являются минимаксными группами. В связи с этим результатом напомним, что по теореме А. И. Мальцева [6] локально нильпотентная группа, все абелевы подгруппы которой имеют конечные ранги, сама имеет конечный ранг. Всюду далее под рангом группы G понимается ее специальный ранг в смысле А. И. Мальцева и обозначается через $r(G)$.

Доказательству теорем предпошлем несколько вспомогательных лемм, первая из которых хорошо известна.

Лемма 1. *Нильпотентная группа G ступени нильпотентности c, $c > 0$, содержит конечнопорожденную подгруппу ступени нильпотентности c.*

Доказательство. Так как ступень нильпотентности равна c, то в силу леммы 1 из работы [3] в группе G найдется отличный от единицы простой коммутатор $[x_1, x_2, \ldots, x_c]$ веса c. Поэтому подгруппа $H = \text{гр}(x_1, x_2, \ldots, x_c)$ имеет ступень нильпотентности c.

Лемма 2. *Пусть нильпотентная группа G содержит подгруппу ступени нильпотентности c, $c > 0$. Если группа G удовлетворяет условию $\min - c - \infty$ или $\max - c - \infty$, то централизатор каждой ее конечнопорожденной подгруппы ступени нильпотентности c является минимаксной группой.*

Доказательство. По лемме 1 группа G содержит конечнопорожденную подгруппу K ступени c. Покажем, что централизатор $C_G(K)$ подгруппы K в группе G является манимаксной группой. Согласно теореме Д. И. Зайцева [5] для этого достаточно показать, что каждая абелева подгруппа из централизатора $C_G(K)$ является минимаксной группой. Пусть A — произвольная абелева подгруппа из централизатора $C_G(K)$. Ясно, что тогда подгруппа AK является нильпотентной группой ступени нильпотентности c. Более того, ступень нильпотентности c имеет каждая подгруппа из группы AK, содержащая подгруппу K. Поэтому в фактор-группе AK/K выполняется слабое условие минимальности или максимальности для всех подгрупп. Следовательно, по теореме Д. И. Зайцева [2] фактор-группа AK/K минимаксна. А так как подгруппа K конечнопорождена, то и подгруппа AK минимаксна. Отсюда вытекает, что абелева подгруппа A минимаксна, что и требовалось доказать.

Лемма 3. *Если в нильпотентной группе G, содержащей подгруппу ступени нильпотентности c, все подгруппы ступени c имеют конечные ранги, то централизатор каждой ее конечнопорожденной подгруппы ступени c также имеет конечный ранг.*

Доказательство. Пусть K — конечнопорожденная подгруппа ступени нильпотентности c группы G, существующая согласно лемме 1. Убедимся, что централизатор $C_G(K)$ подгруппы K в группе G имеет конечный ранг. В силу теоремы А. И. Мальцева [6] достаточно показать, что каждая абелева подгруппа из централизатора $C_G(K)$ имеет конечный ранг. Но если A — произвольная абелева подгруппа из $C_G(K)$, то подгруппа AK является нильпотентной группой ступени c. Поэтому в силу условия леммы группа AK имеет конечный ранг. Следовательно, подгруппа A также имеет конечный ранг. Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть нильпотентная группа G содержит подгруппу ступени нильпотентности c, $c > 0$.*

А. *Если группа G удовлетворяет условию* $\min - c - \infty$ *или* $\max - c - \infty$, *то она минимаксна.*

Б. *Если в группе G все подгруппы ступени нильпотентности c имеют конечные ранги, то группа G имеет конечный ранг.*

Доказательство. По лемме 1 группа G содержит конечнопорожденную подгруппу K ступени нильпотентности c. В силу леммы 2 централизатор $C_G(K)$ подгруппы K в группе G является минимаксной группой в случае А и по лемме 3 имеет конечный ранг в случае Б. Следовательно, по теореме 1 из работы [7] группа G минимаксна в случае А и имеет конечный ранг в случае Б. Теорема доказана.

Лемма 4. *Пусть G — локально нильпотентная периодическая группа и K — некоторая ее конечная подгруппа. Если централизатор $C_G(K)$ подгруппы K в группе G имеет конечный ранг (черниковский), то и группа G имеет конечный ранг (черниковская).*

Доказательство. Как известно, периодическая локально нильпотентная группа G является прямым произведением

$$G = P_1 \times P_2 \times \ldots \times P_n \times \ldots$$

своих силовских p_i-подгрупп P_i, где $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — различные простые числа. Положим $K_i = K_i \cap P_i$, $i = 1, 2, \ldots$. Тогда K_i— силовская p_i-подгруппа в группе K и $K = K_1 \times K_2 \times \ldots \times K_n \times \ldots$. Легко видеть, что

$$C_G(K) = C_{P_1}(K_1) \times C_{P_2}(K_2) \times \ldots \times C_{P_n}(K_n) \times \ldots .$$

Так как подгруппа K конечна, то существует такой номер n_0, что $K_n = 1$ для всех $n \geqslant n_0$. Поэтому централизатор $C_{P_n}(K_n) = P_n$ для всех $n \geqslant n_0$. По условию централизатор $C_G(K)$ имеет конечный ранг (черниковский). Следовательно, для всех $n \geqslant n_0$ подгруппы P_n имеют конечные ранги, не превышающие ранга централизатора $C_G(K)$. Таким образом, чтобы доказать, что группа G имеет конечный ранг (черниковская), достаточно доказать, что подгруппа P_i имеет конечный ранг при $1 \leqslant i \leqslant n_0$. А поскольку централизатор $C_{P_i}(K_i)$ как подгруппа в $C_G(K)$ имеет конечный ранг, то лемму остается доказать для случая, когда G является p-группой. Напомним, что по теореме Н. Н. Мягковой [8], локально нильпотентная p-группа тогда и только тогда черниковская, когда она имеет конечный ранг.

Предположим, что p-группа G имеет бесконечный ранг. По теореме Д. И. Зайцева [9] в группе G существует подгруппа H вида $H = AK$, где A — абелева подгруппа бесконечного ранга, нормализуемая подгруппой K. Так как подгруппа H почти абелева, то она гиперцентральная [10]. Централизатор $C_H(K)$ является подгруппой в $C_G(K)$ и поэтому имеет конечный ранг. Следовательно, согласно следствию теоремы 3 из работы [7] члены верхнего центрального ряда с натуральными номерами гиперцентральной подгруппы H имеют конечные ранги. Поэтому по теореме Х. Х. Мухамеджана [11] подгруппа H является черниковской группой. Но тогда подгруппа A имеет конечный ранг, что противоречит предположению. Таким образом, периодическая локально нильпотентная p-группа G с централизатором $C_G(K)$ конечного ранга сама имеет конечный ранг. Лемма доказана.

Теорема 2. *Пусть G — локально нильпотентная периодическая группа, содержащая подгруппу ступени нильпотентности c, $c > 0$.*

А. *Если группа G удовлетворяет условию* $\min - c - \infty$ *или* $\max - c - - \infty$, *то она черниковская.*

Б. *Если в группе G все подгруппы ступени нильпотентности c имеют конечные ранги, то группа G также имеет конечный ранг.*

Доказательство. В силу предположения и леммы 1 в группе G существует конечная подгруппа K ступени нильпотентности c. Рассмотрим централизатор $C_G(K)$ подгруппы K в группе G и покажем, что при условии А он является черниковской группой, а при условии Б — группой конечного ранга. Действительно, в силу теорем С. Н. Черникова [10] и А. И. Мальцева [6] для этого достаточно показать, что каждая абелева подгруппа из централизатора $C_G(K)$ является соответственно черниковской группой или группой конечного ранга.

Пусть A — произвольная абелева подгруппа из централизатора $C_G(K)$. Тогда подгруппа AK — нильпотентная группа ступени нильпотентности c. В случае А она удовлетворяет условию $\min - c - \infty$ или $\max - c - \infty$ и по теореме 1, A является минимаксной группой. Но периодическая минимаксная группа — черниковская. Следовательно, подгруппа AK — черниковская, а значит, и подгруппа A — черниковская. Таким образом, в случае А централизатор $C_G(K)$ является черниковской группой.

В случае Б нильпотентная подгруппа AK по предположению теоремы имеет конечный ранг и, следовательно, подгруппа A имеет конечный ранг. Значит, в случае Б централизатор $C_G(K)$ имеет конечный ранг. Но тогда по лемме 4 группа G является черниковской при условии А и имеет конечный ранг при условии Б. Теорема доказана.

Лемма 5. *Пусть G — нильпотентная группа без кручения ступени нильпотентности c, $c > 1$, у которой централизатор $C_G(x)$ некоторого отличного от единицы элемента x является метациклической группой. Тогда G — конечнопорожденная группа ранга, не превышающего числа $2c$.*

Доказательство. Пусть Z — центр группы G. Так как Z — подгруппа централизатора $C_G(x)$, то она метациклическая. Фактор-группа G/Z является нильпотентной группой без кручения ступени нильпотентности $c-1$. Пусть H — полный прообраз в группе G централизатора $C_{G/Z}(xZ)$ элемента xZ в фактор-группе G/Z. Отображение $\varphi(h) = [h, x] = h^{-1}x^{-1}hx$, $h \in H$, является гомоморфизмом группы H в группу Z. Очевидно, что ядром этого гомоморфизма является централизатор $C_H(x) = C_G(x)$. По теореме о гомоморфизме фактор-группа $H/C_H(x)$ изоморфна некоторой подгруппе из группы Z и, следовательно, подгруппа H конечнопорождена. Так как по теореме В. М. Глушкова [12] ранг нильпотентной группы без кручения равен сумме рангов членов ее верхнего центрального ряда, то

$$r(H) = r(C_H(x)) + r(H/C_H(x).$$

Учитывая, кроме того, равенство

$$r(H) = r(Z) + r(H/Z),$$

получаем

$$r(H/Z) = r(H) - r(Z) = r(C_H(x)) + r(H/C_H(x)) - r(Z).$$

Ввиду того, что фактор-группа $H/C_H(x)$ изоморфна некоторой подгруппе центра Z, имеем $r(H/C_H(x)) \leqslant r(Z)$. Тогда $r(H/Z) \leqslant r(C_H(x)) \leqslant 2$, поскольку $C_H(x)$ — метациклическая группа. Следовательно, централизатор $C_{G/Z}(xZ)$ является конечнопорожденной группой ранга не выше 2, т. е. метациклической группой. По индуктивным соображениям можно считать, что фактор-группа G/Z является конечнопорожденной группой ранга не выше $2(c-1)$. Но тогда группа G конечнопорождена и ее ранг не превышает числа $2(c-1)+2 = 2c$. Лемма доказана.

Теорема 3. *Существует гиперцентральная группа G без кручения, имеющая для каждого натурального числа $c > 1$ нильпотентную подгруппу ступени нильпотентности c и бесконечный ранг, у которой каждая нильпотентная подгруппа ступени нильпотентности c является конечнопорожденной группой ранга не выше $2c$.*

В частности, группа G обладает следующими свойствами:

а) *удовлетворяет условию* min — c — ∞;

б) *удовлетворяет условию* max — c — ∞ (*и даже* max — c);

в) *все нильпотентные подгруппы ступени нильпотентности c группы G имеют конечные ранги.*

Доказательство. Пусть

$$A = \langle a_1 \rangle x \langle a_2 \rangle x \dots x \langle a_n \rangle x \dots$$

— свободная абелева группа бесконечного ранга и b — автоморфизм бесконечного порядка группы A, действующий таким образом: $a_1^b = a_1$, $a_i^b = a_i a_{i-1}$ для всех $i > 1$. Рассмотрим полупрямое произведение $G = A \leftthreetimes \langle b \rangle$ и покажем, что G — группа, удовлетворяющая условиям теоремы.

Заметим сперва, что для каждого натурального числа $c > 1$ группа G содержит нильпотентную подгруппу ступени нильпотентности c. Легко видеть, что такой подгруппой является, например, подгруппа

$$K = (\langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle \times \dots \times \langle a_c \rangle) \leftthreetimes \langle b \rangle.$$

Покажем теперь, что в группе G каждая нильпотентная подгруппа ступени нильпотентности $c > 1$ является конечнопорожденной группой ранга не выше $2c$. В силу леммы 5 для этого достаточно показать, что централизатор $C_G(x)$ каждого элемента $x \in G$, не содержащегося в подгруппе A является метациклической группой.

Действительно, если H — произвольная нильпотентная подгруппа ступени нильпотентности $c > 1$ в группе G, то H не содержится в подгруппе A и поэтому существует элемент $x \in H \setminus A$. Из того, что централизатор $C_G(x)$ метациклический, будет следовать, что централизатор $C_H(x)$ также метациклический, поскольку $C_H(x) \leqslant C_G(x)$. Но тогда в силу леммы 5 подгруппа H будет конечнопорожденной группой ранга, не превышающего числа $2c$. Убедимся теперь, что централизатор $C_G(x)$ является метациклической группой.

Так как x не принадлежит подгруппе A, то $x = a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \dots a_n^{\alpha_n} b^m$ для некоторого натурального числа n и для некоторых целых чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ $\dots, \alpha_n$ и $m \neq 0$. Ясно, что централизатор $C_A(x) = A \cap C_G(x)$ — нормальная подгруппа в централизаторе $C_G(x)$. В силу изоморфизма

$$C_G(x)/C_A(x) = C_G(x)/A \cap C_G(x) \simeq AC_G(x)/A \leqslant G/A$$

фактор-группа $C_G(x)/C_A(x)$ является подгруппой бесконечно циклической группы. Следовательно, чтобы показать, что централизатор $C_G(x)$ есть метациклическая группа, достаточно доказать, что централизатор $C_A(x)$ — циклическая группа. Легко видеть, что $C_A(x) = C_A(b^m)$ и $C_A(b^m) = C_A(b^{-m})$. Поэтому можно считать, что $m > 0$. Покажем, что для каждого $m \geqslant 1$ централизатор $C_A(b^m) = \langle a_1 \rangle$.

Пусть $a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \dots a_n^{\alpha_n}$ принадлежит централизатору $C_A(b^m)$ и $\alpha_n \neq 0$. Так как $a_i^b = a_i a_{i-1}$, то легко вычисляется, что $a_1^{b^m} = a_1$, $a_2^{b^m} = a_2 a_1^m$, $a_3^{b^m} = a_3 a_2^m a_1^{\binom{m}{2}}$, $\dots$, $a_n^{b^m} = a_n a_{n-1}^m a_{n-2}^{\binom{m}{2}} \dots a_{n-m+1}^{\binom{m}{m-1}} a_{n-m}$. Поэтому из того, что $a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \dots a_n^{\alpha_n}$ принадлежит $C_A(b^m)$, вытекает равенство

$$a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \dots a_n^{\alpha_n} = (a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \dots a_n^{\alpha_n})^{b^m} = (a_1^{b^m})^{\alpha_1} (a_2^{b^m})^{\alpha_2} \dots (a_n^{b^m})^{\alpha_n} =$$
$$= a_1^{\alpha_1 + \binom{m}{1}\alpha_2 + \dots + \binom{m}{m-1}\alpha_m + \alpha_{m+1}} \dots a_{n-1}^{\alpha_{n-1} + m\alpha_n} a_n^{\alpha_n}.$$

Отсюда при $n > 1$ получаем $\alpha_{n-1} + m\alpha_n = \alpha_{n-1}$ и, следовательно, $\alpha_n = 0$. Так как по предположению $\alpha_n \neq 0$, то приходим к противоречию. Таким образом, $n = 1$ и, значит, централизатор $C_A(b^m) = \langle a_1 \rangle$. Следовательно, централизатор $C_G(x)$ каждого элемента x, не принадлежащего подгруппе A, есть метациклическая группа. Теорема доказана.

1. *Зайцев Д. И*. Группы, удовлетворяющие слабому условию минимальности // Укр мат. журн.— 1968.— **20**, № 4.— С. 472—482.
2. *Зайцев Д. И*. К теории минимаксных групп // Там же.— 1971.— **23**, № 5.— С. 652—660.
3. *Зайцев Д. И*. Устойчиво нильпотентные группы // Мат. заметки.— 1967.— **2**, № 4.— С. 337—346.
4. *Зайцев Д. И*. О существовании устойчиво нильпотентных подгрупп в локально нильпотентных группах // Там же.— 1968.— **4**, № 3.— С. 361—368.
5. *Зайцев Д. И*. О группах, удовлетворяющих слабому условию минимальности // Мат. сб.— 1969.— **78**, № 3.— С. 323—331.
6. *Мальцев А. И*. О некоторых классах бесконечных разрешимых групп // Там же.— 1951.— **28**, № 3.— С. 567—588.
7. *Зайцев Д. И., Онищук В. А*. О локально нильпотентных группах с централизатором удовлетворяющим условию конечности // Укр. мат. журн.— 1991.— **43**, № 7-8.— С. 1084—1087.
8. *Мягкова Н. Н*. О группах конечного ранга // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1949.— **13**, № 6.— С. 495—512.
9. *Зайцев Д. И*. О локально разрешимых группах конечного ранга // Докл. АН СССР.— 1978.— **240**, № 2.— С. 257—260.
10. *Черников С. Н*. Группы с заданными свойствами системы подгрупп.— М. : Наука, 1980.— 382 с.
11. *Мухамеджан Х. Х*. О группах, обладающих разрешимым возрастающим инвариантным рядом // Мат. сб.— 1956.— **39**, № 2.— С. 201—218.
12. *Глушков В. М*. О некоторых вопросах теории нильпотентных и локально нильпотентных групп // Там же.— 1952.— **30**, № 1.— С. 79—104.

Получено 03.07.91