

## АНАЛІТИЧНИЙ РОЗРАХУНОК ГЛИБИНИ ПОШИРЕННЯ ТЕМПЕРАТУРНОЇ ХВИЛІ ПРИ ПОБУДОВІ ГЕОТЕРМАЛЬНИХ ТЕПЛОНАСОСНИХ СИСТЕМ

Отримано 03 вер. 2023 р.; рекомендовано до публікації 20 вер. 2023 р.  
Доступно онлайн 30 вер. 2023 р.

Ю. П. Морозов<sup>1</sup>, О. В. Зур'ян<sup>2</sup>

Автор для кореспонденції: Олексій Зур'ян,  
e-mail: alexey\_zuryan@ukr.net

<sup>1</sup> д-р техн. наук.

<http://orcid.org/0000-0003-1632-9735>

<sup>2</sup> канд. техн. наук.

<https://orcid.org/0000-0002-2391-1611>

<sup>1, 2</sup> Інститут відновлюваної енергетики НАН  
України, м. Київ, Україна.

*У процесі вирішення завдань ґрунтового акумулювання*

*й вилучення теплоти з приповерхневих шарів Землі, виникає потреба одержати інформацію щодо глибини добових та річних змін температури в ґрунті, яка визначає шар земної поверхні, що активно взаємодіє з навколоземною атмосферою. У холодну пору року температура в ній знижується, а в теплу – підвищується. Відомо, що ефективність теплонасосної системи залежить як від різниці температур на виході з конденсатора теплового насоса та входу в його випарник, так і від стабільності температури джерела теплової енергії. Температура на вході у випарник теплового насоса визначається температурою ґрунту в місці встановлення колектора теплової енергії. Відомо, що найбільш економічно рентабельною є інсталяція геотермальних теплообмінників, розташованих горизонтально в ґрунті на невеликій глибині, за рахунок менших витрат на земельні роботи та відсутності необхідності буріння глибоких свердловин. Водночас ці системи найвразливіші до перепаду температур, що відбувається в приповерхневих шарах. Тож виникає потреба в дослідженні теплофізичних процесів, що відбуваються в ґрунті під впливом екзогенних факторів. Відомо, що температура ґрунту має добову та річну періодичність. Ступінь нагрівання ґрунту залежить від його теплопровідності, під якою розуміють здатність ґрунту проводити тепло з більш нагрітих шарів у шари менш нагріті. А коливання температури ґрунту може суттєво залежати від рослинного покриву ґрунту, характеру та висоти його протягом року. Разом з тим залишаються недостатньо дослідженими системи теплообмінник–ґрунт, ефективність використання яких безпосередньо залежить від розподілу температури в ґрунті та факторів, які на цей розподіл впливають. Головною особливістю системи добування геотермальної теплової енергії є поєднання технічних і природного елементів таких систем. При цьому природне джерело теплової енергії перебуває в середовищі, яке малодоступне для спостережень. Метою дослідження є розроблення прикладної методології як сукупності принципів та підходів математичного моделювання на основі запропонованого математичного апарату аналітичного розрахунку глибини поширення температурної хвилі при побудові геотермальних теплонасосних систем. Основний математичний апарат для опису таких процесів включає в себе диференціальні рівняння, що враховують залежність температури від часу та просторових координат. Мають перспективу подальші дослідження щодо розрахунку можливості застосування сонячної системи для отримання теплової енергії для зменшення девіації температури теплоносія на вході в випарник теплового насоса, що поступає від горизонтального ґрунтового теплообмінника, змонтованого в ґрунті нижче глибин промерзання та вище нейтрального шару температур.*

**Ключові слова:** тепловий насос, ґрунтове акумулювання, тепlopостачання, коефіцієнт перетворення, періодичність, шар промерзання.

## ANALYTICAL CALCULATION OF THE DEPTH OF TEMPERATURE WAVE PROPAGATION DURING THE CONSTRUCTION OF GEOTHERMAL HEAT PUMP SYSTEMS

Received Sept. 03, 2023; accepted Sept. 20, 2023

Available online Sept. 30, 2023

Yu. Morozov<sup>1</sup>, O. Zurian<sup>2</sup>

Author for correspondence: Oleksii Zurian,  
e-mail: alexey\_zurian@ukr.net

<sup>1</sup> Dr. of Tech. Sciences, senior researcher.  
<http://orcid.org/0000-0003-1632-9735>

<sup>2</sup> Cand. of Tech. Sciences.  
<https://orcid.org/0000-0002-2391-1611>

<sup>1, 2</sup> Institute of Renewable Energy of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, Ukraine.

*In the process of solving the tasks of soil accumulation and extraction of heat from the near-surface layers of the Earth, there is a need to obtain information about the depth of daily and annual temperature changes in the soil, which determines the layer of the Earth's surface that actively interacts with the Earth's atmosphere. In the cold season, the temperature in it drops, and in the warm season it rises. It is known that the efficiency of the heat pump system depends both on the temperature difference at the outlet of the heat pump condenser and the inlet to its evaporator, and on the stability of the temperature of the heat energy source. The temperature at the inlet to the heat pump evaporator is determined by the temperature of the soil at the place of installation of the thermal energy collector. It is known that the most economically profitable is the installation of geothermal heat exchangers located horizontally in the soil at a shallow depth, due to lower costs for land works and the absence of the need to drill deep wells. At the same time, these systems have the greatest vulnerability to the temperature difference that occurs in the near-surface layers. Therefore, there is a need to study thermophysical processes occurring in the soil under the influence of exogenous factors. It is known that soil temperature has daily and annual periodicity. The degree of heating of the soil depends on its thermal conductivity, which is understood as the ability of the soil to conduct heat from more heated layers to less heated layers. And the course of soil temperature can significantly depend on the vegetation cover of the soil, its nature and height throughout the year. At the same time, heat exchanger-soil systems, the effectiveness of which directly depends on the distribution of temperature in the soil and the factors affecting this distribution, remain insufficiently researched. The main feature of the geothermal heat energy extraction system is the combination of technical and natural elements of such systems. At the same time, the natural source of thermal energy is located in an environment that is not easily accessible for observation. The purpose of the research is to develop an applied methodology as a set of principles and approaches of mathematical modeling based on the proposed mathematical apparatus for analytical calculation of the depth of temperature wave propagation during the construction of geothermal heat pump systems. The basic mathematical apparatus for describing such processes includes differential equations that take into account the dependence of temperature on time and spatial coordinates. Further studies are promising for calculating the possibility of using a solar system to obtain thermal energy to reduce the temperature deviation of the heat carrier at the inlet to the evaporator of the heat pump, which comes from a horizontal ground heat exchanger mounted in the soil below freezing depths and above the neutral temperature layer.*

**Key words:** heat pump, soil storage, heat supply, conversion factor, periodicity, freezing layer.

### Перелік використаних позначень та скорочень:

ВДЕ – відновлювані джерела енергії  
ТН – тепловий насос  
ТО – термоперетворювач опору  
ПЗ – програмне забезпечення  
ГВП – гаряче водопостачання  
БДТЕ – безліч джерел теплової енергії

БТЗ – безліч технічних засобів  
БС – безліч структур  
 $\varphi$  – коефіцієнт перетворення теплоти (англ. Coefficient of performance), коефіцієнт, що показує ефективність теплового насоса  
ДБН – Державні будівельні норми  
ДСТУ – Державні стандарти України

**Вступ.** Відновлювана енергетика є важливим інструментом для досягнення цілей сталого розвитку, включаючи збереження довкілля, забезпечення сталого виробництва та зменшення впливу енергетичного сектору на клімат. Відновлювані джерела енергії (ВДЕ) є нескінченними джерелами, що не вичерпуються з часом. Це забезпечує стабільне джерело енергії на майбутнє.

Водночас основний недолік відновлюваної енергії – її непостійність. Виробництво теплової й електричної енергії енергетичними установками, що як джерело енергії використовують ВДЕ, залежить як від місця розміщення та умов експлуатації, так і погодно-кліматичних умов, зміна яких має випадковий характер. Тому в локальних енергосистемах з ВДЕ є ризики енергопостачання споживачів, пов'язані з мінливістю енергоносія. Наслідки від цих ризиків полягають у високій ймовірності порушення енергопостачання споживачів. Отже, важливим питанням стає розробка методики проектування енергетичних систем, що працюють за рахунок ВДЕ з урахуванням випадкового характеру факторів, що впливають на стабільність отримання енергії.

Серед ВДЕ теплота земних надр характеризується стабільністю параметрів, які не залежать від сезонних і добових коливань температури. До геотермальних джерел енергії відносять теплові енергії, акумульовані гірськими породами, підземними термальними водами в усіх агрегатних станах та верхніми шарами Землі, які розташовані нижче нейтрального шару та мають температуру до 36 °C. Гідротермальна енергія – це енергія, накопичена у формі теплової енергії у поверхневих водах (води суходолу, що постійно або тимчасово перебувають на земній поверхні у формі різних водних об'єктів).

Одним з високоефективних пристроїв перетворення низькопотенційної відновлюваної енергії є теплові насоси.

Водночас ефективність роботи теплонасосної системи суттєво залежить від температури на вході до випарника теплового насоса. Таким чином, впровадження геотермальних теплонасосних систем обумовлює проведення широкого спектра гідрогеотермічних досліджень.

Науково-дослідні та дослідно-конструкторські роботи з підвищення ефективності геотермальних теплових насосів проводяться як в Україні, так і у світі вже тривалий час. Перспективи застосування теплових насосів досліджені в працях [1, 2, 3]. Аналіз ефективності використання теплового потенціалу довкілля та верхніх шарів Землі наведено в роботах [4, 5]. В роботах [6,7,8] проведено оцінку ефективності теплових насосів різних типів. Авторами [9, 10] виконано порівняльний енергетичний аналіз теплових насосів. Дослідження щодо встановлення теплового балансу в ґрунті під час експлуатації ГеоТНС описано в роботах [11, 12]. Проводяться активні науково-дослідницькі роботи з вивчення фізичних особливостей та енергетичної ефективності акумулювання

тепла та холоду шляхом використання води підземних горизонтів [14, 15, 16].

Результати цих досліджень підтверджують перспективність наряду підвищення енергоефективності за рахунок використання низькопотенційної теплової енергії верхніх шарів Землі для потреб опалення, кондиціювання, гарячого водопостачання та забезпечення технологічних потреб споживачів.

**Постановка завдання.** Мірою енергетичної ефективності теплонасосної установки (ТНУ) є коефіцієнт перетворення, який характеризує відношення енергії, що надійшла споживачеві, до витраченої енергії. Оцінки показують, що для вдало спроектованих систем теплопостачання коефіцієнт перетворення може досягати від 4 до 6.

Підвищенням ефективності та надійності теплових насосів займаються передові комерційні компанії та наукові інститути світу. Цей процес відбувається постійно, що призводить до зменшення металоємкості приладів та їх вартості й підвищення надійності та функціональності.

Водночас залишаються недостатньо дослідженими системи теплообмінник–ґрунт, ефективність використання яких безпосередньо залежить від розподілу температури в ґрунті та факторів, які на цей розподіл впливають.

Головною особливістю системи добування геотермальної теплової енергії є поєднання технічних і природного елементів таких систем. При цьому природне джерело теплової енергії перебуває в середовищі, яке малодоступне для спостережень.

За таких обставин основними методами дослідження теплових і гідродинамічних процесів у системах видобування низькопотенційних геотермальних ресурсів з приповерхневих шарів Землі та системах їх перетворення на енергію, комфортну для застосування в теплоенергетиці, є теоретичні методи. Найважливіший з них – математичне моделювання. Серйозною перешкодою, що стримує впровадження цих систем, є фактична відсутність аналітичного, математичного, програмного і методичного забезпечення для розробки таких систем для різних (гідрогеологічних, метеорологічних, морфологічних, біологічних, антропогенних) умов використання.

Цим обумовлені значущість й актуальність теми дослідження.

**Мета дослідження** – розробити прикладну методологію як сукупність принципів та підходів математичного моделювання на основі запропонованого математичного апарату аналітичного розрахунку глибини поширення температурної хвилі при побудові геотермальних теплонасосних систем.

**Методи.** У статті використано такі методи: аналіз, синтез, дедукція, метод екстраполяції, порівняльний метод та індуктивний

**Об'єктом дослідження** є процеси періодичного перенесення теплової енергії з послідовним нагріванням та охолодженням, а саме — коливання температури кори Землі, що перебуває під періодичним впливом Сонця. **Предметом дослідження** є параметри цих процесів.

### Виклад основного матеріалу

Теоретичне дослідження теплообміну проводиться із застосуванням принципів моделювання, тобто, розробкою спрощених (певним чином) фізичних моделей, що інтерпретують складні теплові процеси. При цьому робоче середовище зазвичай уявляють у вигляді абстрактного фізичного тіла суцільної будови, без поділу на структурні елементи (молекули й атоми). До того ж середовища можуть бути як однорідними, так і неоднорідними, ізотропними та неізотропними. Також суцільні середовища є однофазними та багатфазними (часто — двофазними).

Для двофазних середовищ специфічні конвективні теплообмінні процеси (які часто трапляються в техніці) вирізняють у вигляді кипіння та конденсації. Процеси теплообміну при сублімації та десублімації речовин у цій статті не розглядаються. Методи дослідження процесів теплообміну підрозділяють на теоретичні (аналітичні), чисельні (наближені) та експериментальні. Складність теплофізичних процесів, яка пов'язана здебільшого з одночасною зміною низки фізичних характеристик середовищ при зміні визначальних термодинамічних параметрів, зумовлює необхідність застосування експериментальних методів. Останні часто є складними, трудомісткими та дорогими, що іноді унеможливує вирішення реальних інженерних задач.

Застосування сучасної обчислювальної техніки, розвиток якої невинно прогресує, зумовлює актуальність застосування наближених чисельних методів, які, при коректній постановці теоретичних задач, правильному моделюванні реальних теплофізичних процесів та вибірових вимірюваннях теплотехнічних параметрів у контрольних точках середовищ (в реальних виробничих та експлуатаційних умовах) дають змогу не лише значно пришвидшити розв'язок задач, а й здійснити раніше неможливі рішення технічних проблем.

У багатьох теплових процесах відбувається періодичне перенесення теплової енергії з послідовним нагріванням та охолодженням. Наприклад, поверхневий шар Землі перебуває під впливом коливань температури — річних, добових тощо.

При інсталяції геотермальних теплообмінників, що розташовуються горизонтально у верхніх шарах ґрунту при побудові геотермальних теплонасосних систем, які використовують низькопотенційну теплову енергію ґрунту, необхідно враховувати, на яку глибину розповсюд-

жується тепла хвиля і яка в цій місцевості глибина промерзання ґрунту.

**Глибина промерзання ґрунту** — це глибина, на яку проникає процес промерзання в ґрунті під впливом низьких температур. Це явище відбувається в зимовий період, коли поверхневий шар ґрунту охолоджується і може замерзати.

Процес промерзання починається з поверхні ґрунту й рухається вглиб, поки не досягне глибини промерзання. Глибина цього шару може значно варіюватися залежно від географічного положення, кліматичних умов та інших факторів. У холодних кліматичних зонах, таких як північні регіони, глибина промерзання може бути значною і досягати декількох метрів, тоді як в тепліших регіонах вона може бути лише кілька сантиметрів.

Глибина промерзання ґрунту має важливе значення для інженерії та будівництва, оскільки вона впливає на стійкість будівельних конструкцій, доріг та інфраструктури. Вимірювання глибини промерзання ґрунту допомагають розробляти відповідні будівельні методи й матеріали для забезпечення безпеки та надійності споруд в умовах холодного клімату.

Глибину промерзання ґрунту можна визначити на підставі кліматичних даних, зокрема середніх температур та глибини промерзання в різні роки. Ось декілька методів визначення глибини промерзання:

**Метод середньодобових температур.** Цей метод використовує середньодобові температури повітря протягом зимового місяця (зазвичай січень) та середньодобові температури ґрунту на різних глибинах. Глибина промерзання визначається там, де середньодобова температура ґрунту опускається до рівня замерзання.

**Метод температурних режимів ґрунту.** Цей метод використовує дані про температуру ґрунту на різних глибинах та розраховує глибину промерзання на основі різниці між середньодобовою температурою ґрунту та температурою замерзання.

**Метод глибини промерзання та середньорічної температури.** Цей метод використовує співвідношення між середньорічною температурою повітря та глибиною промерзання для конкретного регіону. Зазвичай ці дані подаються в геологічних атласах або кліматичних таблицях.

**Моделювання глибини промерзання.** Можна використовувати комп'ютерні програми та моделі, що враховують кліматичні умови, фізичні властивості ґрунту та інші фактори для розрахунку глибини промерзання. Цей підхід може бути точнішим, оскільки враховує багато параметрів.

Періодичне перенесення теплової енергії з послідовним нагріванням і охолодженням може бути описане за

допомогою математичних рівнянь теплопровідності або рівнянь теплоперенесення. Основний математичний апарат для опису таких процесів включає в себе диференціальні рівняння, що враховують залежність температури від часу та просторових координат.

Варто зауважити, що періодичні розв'язки рівняння теплопровідності можуть існувати тоді і лише тоді, коли присутнє періодичне джерело тепла чи всередині розглянутого інтервалу, чи на його межі. Це між іншим означає, що межові умови (принаймні одна з межових умов) за відсутності періодичного джерела обов'язково мають бути періодичними. Якщо розглядати достатньо тривалий температурний процес, то вплив початкового

розподілу температур слабшає, тому варто шукати розв'язок, що задовольняє лише межові умови.

Диференціальне рівняння, що описує процес поширення тепла (неважливо, періодичний процес чи просто нестационарний) в середовищі, має вигляд

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} = 0. \quad (1)$$

де  $a$  – коефіцієнт дифузійного перенесення енергії (коефіцієнт температуропровідності).

Далі чинимо за стандартною процедурою. Покладімо  $T(x, t) = X(x)T(t)$  та підставимо цей вираз до (1). Маємо

$$\frac{\partial^2 X(x)T(t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a} \frac{\partial X(x)T(t)}{\partial t} = 0, \quad \frac{1}{X(x)} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} - \frac{1}{aT(t)} \frac{\partial T(t)}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{1}{X(x)} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = \frac{1}{aT(t)} \frac{\partial T(t)}{\partial t}.$$

Остання рівність можлива тоді і лише тоді коли як ліва, так і права частини рівняння дорівнюють тій самій константі. Тут можливі варіанти.

Нехай, наприклад,

$$\frac{1}{X(x)} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = \mu^2, \quad \frac{1}{aT(t)} \frac{\partial T(t)}{\partial t} = \mu^2,$$

тоді маємо два диференціальні рівняння

$$\frac{d^2 X(x)}{dx^2} - \mu^2 X(x) = 0, \quad \frac{\partial T(t)}{\partial t} - \mu^2 a T(t) = 0,$$

що їх розв'язками є

$$X(x) = C_1 e^{\mu x} + C_2 e^{-\mu x}; \quad T(t) = C e^{a\mu^2 t},$$

де  $C, C_1, C_2$  – невідомі сталі, що їх можна визначити з межових та початкових умов задачі. Отже, розв'язок (за умови такого  $\mu$ ) і для скінченного інтервалу  $x \in [a, b]$ ,  $a \neq \infty, b \neq \infty$  можна написати так:

$$T(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (e^{\mu_n x} + B_n e^{-\mu_n x}) e^{a\mu_n^2 t} \quad (2)$$

$\mu_n$  – корені трансцендентного рівняння, що впливає з межових умов.

Цей розв'язок цікавий тим, що з плином часу він зростає і прямує до безмежності. Ми наводимо його тут чисто з методологічних міркувань, бо не так просто підібрати таку ситуацію, де виникає потреба скористатися саме таким розв'язком.

Нехай

$$\frac{1}{X(x)} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = -\mu^2, \quad \frac{1}{aT(t)} \frac{\partial T(t)}{\partial t} = -\mu^2$$

тоді маємо два диференціальні рівняння

$$\frac{d^2 X(x)}{dx^2} + \mu^2 X(x) = 0, \quad \frac{\partial T(t)}{\partial t} + \mu^2 a T(t) = 0, \quad (3)$$

що їх розв'язками є

$$X(x) = C_1 \sin \mu x + C_2 \cos \mu x; \quad T(t) = C e^{-a\mu^2 t}. \quad (4)$$

Отже,

$$T(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (\sin \mu_n x + B_n \cos \mu_n x) e^{-a\mu_n^2 t}. \quad (5)$$

Це класичний найвживаніший розв'язок для скінченного інтервалу  $x \in [a, b]$ ,  $a \neq \infty, b \neq \infty$ .

Нехай тепер  $\mu^2 = \frac{i\omega}{a}$ ,  $i = \sqrt{-1}$  (це завжди можна зробити, бо на  $\mu$  не накладено жодних умов). Підставивши це значення  $\mu$  до (3), отримаємо два диференціальних рівняння, що їхніми розв'язками є

$$\frac{d^2 X(x)}{dx^2} + \frac{i\omega}{a} X(x) = 0, \quad \frac{\partial T(t)}{\partial t} + \frac{i\omega}{a} a T(t) = 0,$$

$$X(x) = A e^{x\sqrt{\frac{i\omega}{a}}} + B e^{-x\sqrt{\frac{i\omega}{a}}}, \quad T(t) = C e^{-i\omega t}.$$

Оскільки  $\sqrt{i} = \pm \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ , то

$$x\sqrt{\frac{i\omega}{a}} = x\sqrt{i}\sqrt{\frac{\omega}{a}} = x(1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2a}}.$$

Отже,

$$X(x) = Ae^{x(1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2a}}} + Be^{-x(1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2a}}}, \quad T(t) = Ce^{-i\omega t},$$

а розв'язок буде такий:

$$\begin{aligned} T(x, t) &= \left[ Ae^{x(1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2a}}} + Be^{-x(1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2a}}} \right] e^{-i\omega t} = \\ &= Ae^{x\sqrt{\frac{\omega}{2a}}} e^{-i\left(\omega t - x\sqrt{\frac{\omega}{2a}}\right)} + Be^{-x\sqrt{\frac{\omega}{2a}}} e^{-i(\omega t + x)\sqrt{\frac{\omega}{2a}}}. \end{aligned}$$

За Ойлером

$$e^{-i(\omega t + x)\sqrt{\frac{\omega}{2a}}} = \cos\left(-(\omega t + x)\sqrt{\frac{\omega}{2a}}\right) + i \sin\left(-(\omega t + x)\sqrt{\frac{\omega}{2a}}\right),$$

але  $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ ,  $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$ . Отже,

$$\begin{aligned} e^{-i(\omega t + x)\sqrt{\frac{\omega}{2a}}} &= \cos(\omega t + x)\sqrt{\frac{\omega}{2a}} - i \sin(\omega t + x)\sqrt{\frac{\omega}{2a}}, \\ T(x, t) &= Ae^{x\sqrt{\frac{\omega}{2a}}} \left[ \cos(\omega t - x)\sqrt{\frac{\omega}{2a}} - i \sin(\omega t - x)\sqrt{\frac{\omega}{2a}} \right] + \\ &+ Be^{-x\sqrt{\frac{\omega}{2a}}} \left[ \cos(\omega t + x)\sqrt{\frac{\omega}{2a}} - i \sin(\omega t + x)\sqrt{\frac{\omega}{2a}} \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

Тут  $A, B$  – довільні сталі, що їх визначають з межових умов.

У деяких задачах, як-от стінка, що до неї з одного боку надходить періодичний потік тепла, а з другого боку температура є константою, доцільно перейти до комплексних змінних. Якщо взяти  $\mu^2 = -\frac{i\omega}{a}$ ,  $i = \sqrt{-1}$  та підставити таке значення  $\mu$  до (3), отримаємо два диференціальних рівняння, та їхні розв'язки

$$\frac{d^2 X(x)}{dx^2} - \frac{i\omega}{a} X(x) = 0, \quad \frac{\partial T(t)}{\partial t} - \frac{i\omega}{a} T(t) = 0,$$

$$X(x) = A \operatorname{ch}\left(x\sqrt{\frac{i\omega}{a}}\right) + B \operatorname{sh}\left(x\sqrt{\frac{i\omega}{a}}\right), \quad T(t) = Ce^{i\omega t},$$

де  $\operatorname{ch}\left(x\sqrt{\frac{i\omega}{a}}\right)$ ,  $\operatorname{sh}\left(x\sqrt{\frac{i\omega}{a}}\right)$  – гіперболічні косинус та синус від уявного аргументу.

$$\text{Позаяк } x\sqrt{\frac{i\omega}{a}} = x\sqrt{i}\sqrt{\frac{\omega}{a}} = x(1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2a}}$$

$$T(x, t) = \left[ A \operatorname{ch}\left(x(1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2a}}\right) + B \operatorname{sh}\left(x(1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2a}}\right) \right] e^{i\omega t}, \quad (7)$$

де, як і раніше,  $A, B$  – довільні сталі, що їх визначають з межових умов. Оскільки [10]

$$\operatorname{ch}\left(x(1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2a}}\right) = \operatorname{ch}(x)\cos\left(x\sqrt{\frac{\omega}{2a}}\right) + i \operatorname{sh}(x)\sin\left(x\sqrt{\frac{\omega}{2a}}\right),$$

$$\operatorname{sh}\left(x(1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2a}}\right) = \operatorname{sh}(x)\cos\left(x\sqrt{\frac{\omega}{2a}}\right) + i \operatorname{ch}(x)\sin\left(x\sqrt{\frac{\omega}{2a}}\right)$$

$$\begin{aligned} T(x, t) &= [A \operatorname{ch}(x) + B \operatorname{sh}(x)] \cos\left(x\sqrt{\frac{\omega}{2a}}\right) e^{i\omega t} + \\ &+ i[A \operatorname{sh}(x) + B \operatorname{ch}(x)] \sin\left(x\sqrt{\frac{\omega}{2a}}\right) e^{i\omega t}. \end{aligned}$$

Отже, періодичними розв'язками рівняння (1) будуть (6) чи (7).

Задачі про теплопровідність твердого тіла з періодично змінною температурою на поверхні трапляються у

випадках коливання температури кори Землі, що перебуває під періодичним впливом Сонця, при визначенні коефіцієнта температуропровідності на різноманітних пристроях тощо.

Розглянемо достатньо тривалий температурний процес, так що впливом початкового розподілу температури тіла можна знехтувати. Тоді маємо:

шукати розв'язок, що задовольняє лише межові умови. Розв'язок диференціального рівняння

$$\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a} \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = 0, \quad (0 < x < \infty) \quad (1)$$

будемо шукати у вигляді

$$T(x,t) = T(x) e^{i\omega t}. \quad (2)$$

Підставивши (2) до рівняння (1), одержуємо

$$X(x) = A \exp\left(-x(1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2a}}\right) + B \exp\left(x(1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2a}}\right). \quad (5)$$

У цій формулі треба покласти  $B = 0$ , бо розв'язок на безконечності обмежений. Тоді

$$T(x,t) = A e^{-x(1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2a}}} e^{i\omega t} = A e^{-x\sqrt{\frac{\omega}{2a}}} e^{i\left(\omega t - x\sqrt{\frac{\omega}{2a}}\right)}$$

чи

$$T(x,t) = A e^{-x\vartheta} [\cos(\omega t - x\vartheta) + i \sin(\omega t - x\vartheta)],$$

$$\vartheta = \sqrt{\frac{\omega}{2a}}.$$

Позаяк уявна частина  $i \sin(\omega t - x\vartheta)$  не задовольняє межові умови, її треба вилучити. Маємо розв'язок рівняння (1) з періодом  $\frac{2\pi}{\omega}$ :

$$T(x,t) = A e^{-x\vartheta} \cos(\omega t - x\vartheta), \quad (6)$$

Якщо на поверхні  $x = 0$  задано температуру, що змінюється за законом  $A_0 \cos \omega t$ , то розв'язок рівняння (1) набуває вигляду

$$T(x,t) = A_0 e^{-x\vartheta} \cos(\omega t - x\vartheta). \quad (7)$$

Цей розв'язок визначає температурну хвилю з хвилювим числом  $\vartheta = \sqrt{\frac{\omega}{2a}}$  і довжиною хвилі  $\lambda$ .

$$\lambda = \frac{2\pi}{\vartheta} = \sqrt{\frac{4\pi a}{n}}, \quad (8)$$

де  $n$  – частота,  $n = \frac{\omega}{2\pi}$ .

$$\sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right), \quad \cos x - \sin x = \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} = -A_0 \vartheta \sqrt{2} e^{-x\vartheta} \cos\left(\omega t - x\vartheta + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\frac{d^2 T(x)}{dx^2} - \frac{i\omega}{a} T(x) = 0, \quad (3)$$

що його розв'язки є

$$X(x) = A \exp\left(-x\sqrt{\frac{i\omega}{a}}\right) + B \exp\left(x\sqrt{\frac{i\omega}{a}}\right). \quad (4)$$

Позаяк

$$\sqrt{\frac{i\omega}{a}} = (1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2a}},$$

Цей розв'язок повинен мати період, що дорівнює  $\frac{2\pi}{\omega}$ .

Найважливіші властивості періодичної функції температури (7) при усталеному режимі:

1. У будь який момент часу розподіл температури в масиві має вигляд хвилі, що її амплітуда меншає за глибиною.

2. Амплітуда коливань температури меншає за законом

$$e^{-x\vartheta} = e^{-x\sqrt{\frac{\omega}{2a}}} = e^{-\frac{2\pi x}{\lambda}}, \quad (9)$$

і, отже, меншає тим швидше, чим більше  $\omega$  чи частота коливань  $n = \frac{\omega}{2\pi}$ .

3. Фаза температурної хвилі запізнюється за законом

$$x\vartheta = x\sqrt{\frac{\omega}{2a}}.$$

Це запізнювання більшає зі збільшенням  $\omega$  чи частоти.

4. Температурні коливання (наприклад, розташування максимуму та мінімуму) поширюються всередину тіла зі швидкістю

$$\sqrt{2a\omega}.$$

Тепловий потік  $Q$  на поверхні тіла  $x = 0$  буде такий:

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} = -A_0 \vartheta e^{-x\vartheta} [\cos(\omega t - x\vartheta) - \sin(\omega t - x\vartheta)],$$

$$\left. \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \right|_{x=0} = -A_0 \vartheta (\cos \omega t - \sin \omega t), \text{ але}$$

$$\left. \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \right|_{x=0} = -A_0 g \sqrt{2} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right).$$

Отже,

$$Q = -\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = \sqrt{2} g \lambda A_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$$

чи

$$Q = -\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = -\sqrt{2} g \lambda A_0 \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right).$$

Якщо періодичну функцію  $\varphi(t)$  на поверхні тіла не описано за законом  $A_0 \cos \omega t$  чи  $A_0 \sin \omega t$ , проте вона є часозалежною функцією з періодом  $\frac{2\pi}{\omega}$ , то її можна розвинути в ряд Фур'є за косинусами:

$$\varphi(t) = A_0 + A_1 \cos(\omega t) + A_2 \cos(2\omega t) + \dots$$

Коефіцієнти  $A_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  знаходимо за стандартною процедурою:

$$A_0 = \frac{\omega}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} \varphi(t) dt, \quad A_n = \frac{\omega}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} \varphi(t) \cos(n\omega t) dt,$$

розв'язок набуває вигляду

$$T(x,t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-x\sqrt{\frac{n\omega}{2\kappa}}} \cos\left(n\omega t - x\sqrt{\frac{n\omega}{2\kappa}}\right).$$

Цей розв'язок цікавий ще й тим, що дає змогу досить легко проаналізувати слабшання амплітуд температури вищих гармонік при зростанні  $x$ .

Основним джерелом тепла, що надходить у ґрунт, є промениста енергія Сонця, яка поглинається поверхнею ґрунту, перетворюється на теплову енергію й передається у верхні, а потім і в глибокі його шари. Отже, поверхня ґрунту, що поглинає та випромінює теплову енергію, регулює тепловий режим ґрунту.

Ступінь нагрівання ґрунту залежить від його теплопровідності, під якою розуміють здатність ґрунту проводити тепло з більш нагрітих шарів до менш нагрітих.

Проте зволоження ґрунту, тобто заміщення повітря водою, збільшує теплопровідність ґрунту, проте не пропорційно величині вологості.

Теплопровідність ґрунту має добовий та річний хід, через те, що вологість ґрунту має також добовий та річний хід.

У вологому ґрунті добові коливання температури ґрунту і зміни температури між його окремими шарами менші, ніж у сухому.

Зміни температури ґрунту в часі, а також за глибинами визначається його температуропровідністю, для цього використовується коефіцієнт температуропровідності, який дорівнює коефіцієнту теплопровідності, поділеному на об'ємну теплоємність ґрунту:

$$K = H/c$$

де  $K$  – коефіцієнт температуропровідності,  $H$  – коефіцієнт теплопровідності,  $c$  – об'ємна теплоємність.

### Визначення коефіцієнта температуропровідності

Якщо на поверхні  $x = 0$  міститься періодичне джерело тепла з деякою частотою коливань  $n$  ( $\omega = 2\pi n$ ) чи з

періодом  $T = \frac{1}{n} = \frac{2\pi}{\omega}$ , то рівняння (7) описує процес поширення температурної хвилі в півпростір:

$$T(x,t) = A_0 e^{-xg} \cos(\omega t - xg),$$

$$g = \sqrt{\frac{\omega}{2a}} = \sqrt{\frac{\pi n}{a}} = \sqrt{\frac{\pi}{aT}},$$

$$T(x,t) = A_0 e^{-x\sqrt{\frac{\pi}{aT}}} \cos\left(2\frac{\pi t}{T} - x\sqrt{\frac{\pi}{aT}}\right).$$

Нехай на певній відстані  $x_1$  та  $x_2$  від джерела тепла містяться датчики температури. В будь-який момент часу температура в точках  $x_1$ ,  $x_2$  буде така:

$$T(x_1,t) = A_0 e^{-x_1\sqrt{\frac{\pi}{aT}}} \cos\left(2\frac{\pi t}{T} - x_1\sqrt{\frac{\pi}{aT}}\right),$$

$$T(x_2,t) = A_0 e^{-x_2\sqrt{\frac{\pi}{aT}}} \cos\left(2\frac{\pi t}{T} - x_2\sqrt{\frac{\pi}{aT}}\right).$$

Максимальна температура певної хвилі (амплітуда) в точках  $x_1$ ,  $x_2$  буде, коли аргумент косинуса дорівнює нулеві. Маємо

$$T_{\max}(x_1,t) = A_0 e^{-x_1\sqrt{\frac{\pi}{aT}}},$$

$$T_{\max}(x_2,t) = A_0 e^{-x_2\sqrt{\frac{\pi}{aT}}}.$$

Прилад реєстрації (наприклад, самописець) реєструє як довжину хвилі, так і її амплітуду в точках  $x_1$ ,  $x_2$ . Вибравши хвилю максимальної довжини (така хвиля згасає найповільніше), знаходимо відношення максимальних амплітуд  $\theta$ .

$$\theta = \frac{T_{\max}(x_1,t)}{T_{\max}(x_2,t)} = \frac{A_0 e^{-x_1\sqrt{\frac{\pi}{aT}}}}{A_0 e^{-x_2\sqrt{\frac{\pi}{aT}}}},$$

$$\theta = \frac{e^{-x_1 \sqrt{\frac{\pi}{aT}}}}{e^{-x_2 \sqrt{\frac{\pi}{aT}}}}, \quad \theta e^{-x_2 \sqrt{\frac{\pi}{aT}}} = e^{-x_1 \sqrt{\frac{\pi}{aT}}},$$

$$\ln \theta - x_2 \sqrt{\frac{\pi}{aT}} = -x_1 \sqrt{\frac{\pi}{aT}}, \quad \ln \theta = x_2 \sqrt{\frac{\pi}{aT}} - x_1 \sqrt{\frac{\pi}{aT}},$$

$$\sqrt{\frac{\pi}{aT}} = \frac{\ln \theta}{x_2 - x_1}, \quad a = \frac{\pi (x_2 - x_1)^2}{T \ln^2 \theta}.$$

Передача тепла в глибокий ґрунт відбувається переважно шляхом молекулярної теплопровідності, а також в результаті радіаційного та конвективного теплообміну.

Основні закономірності розподілу коливань температури в глибокий ґрунт, сформульовані Фур'є, такі:

1. Період коливань температури є незмінним у всіх глибинах (протягом доби, року).
2. Амплітуда коливань температури зменшується з глибиною. При зростанні глибини з арифметичною прогресією амплітуда зменшується в геометричній прогресії і на деякій глибині згасає.
3. Час настання максимумів і мінімумів запізнюється з глибиною. Запізнення відбувається пропорційно до глибини.
4. Глибина постійної річної та добової температури відносяться як корінь квадратний з періодів коливань. Оскільки період коливань зіставляє добу і рік, то згідно з цим положенням глибина загасання річних коливань у 19 разів перевищує глибину загасання добових коливань.

Для визначення глибини проникнення теплової хвилі знову скористаймося формулою

$$X = \ln 100 \sqrt{\frac{aT}{\pi}} = \ln 100 \sqrt{\frac{0,00273 \times 24}{\pi}} \text{ м} = 0,665 \text{ м}.$$

Отже, добові коливання температури в сухому піщаному ґрунті згасають у 100 разів на глибині 66 см.

Для ґрунту піщаного з вологістю 8%  $a = 0,0033 \frac{\text{м}^2}{\text{год}}$

$$X = \ln 100 \sqrt{\frac{aT}{\pi}} = \ln 100 \sqrt{\frac{0,0033 \times 24}{\pi}} \text{ м} = 0,731 \text{ м},$$

а для ґрунтів (в середньому)  $a = 0,0046 \frac{\text{м}^2}{\text{год}}$

$$X = \ln 100 \sqrt{\frac{aT}{\pi}} = \ln 100 \sqrt{\frac{0,0046 \times 24}{\pi}} \text{ м} = 0,863 \text{ м}.$$

Для гірських порід (середнє значення)  $a = 0,0118 \frac{\text{м}^2}{\text{год}}$

$$X = \ln 100 \sqrt{\frac{aT}{\pi}} = \ln 100 \sqrt{\frac{0,0118 \times 24}{\pi}} \text{ м} = 1,382 \text{ м}.$$

$$T(x, t) = A_0 e^{-x \sqrt{\frac{\pi}{aT}}} \cos \left( 2 \frac{\pi t}{T} - x \sqrt{\frac{\pi}{aT}} \right).$$

На поверхні  $x = 0$  максимальна температура (амплітуда) буде

$$T_0(0, t) = A_0,$$

а на деякій відстані  $x = X$  максимальна амплітуда

$$T_X(X, t) = A_0 e^{-X \sqrt{\frac{\pi}{aT}}}.$$

Нехай тепер в точці  $x = X$  амплітуда в 100 разів менша від початкової  $A_0$ . Маємо відношення

$$\frac{T_0(0, t)}{T_X(X, t)} = \frac{A_0}{A_0 e^{-X \sqrt{\frac{\pi}{aT}}}} = \frac{1}{e^{-X \sqrt{\frac{\pi}{aT}}}}, \quad \frac{1}{e^{-X \sqrt{\frac{\pi}{aT}}}} = 100,$$

$$e^{-X \sqrt{\frac{\pi}{aT}}} = \frac{1}{100}, \quad X = \ln 100 \sqrt{\frac{aT}{\pi}}.$$

Отже, теплова хвиля слабшає в 100 разів на глибині чи відстані від поверхні  $x = 0$

$$X = \ln 100 \sqrt{\frac{aT}{\pi}},$$

де  $T$  – період.

Нехай, наприклад, маємо для сухого піщаного ґрунту

$a = 0,00273 \frac{\text{м}^2}{\text{год}}$ ,  $T = 24 \text{ год}$ , тобто добові коливання.

Визначимо також, на яку глибину поширюється «літня спекотлива» хвиля, тобто глибину, до якої надійде фронт температурної хвилі за час, що дорівнює половині періоду коливання температури. Для цього потрібно в формулі

$$T(x, t) = A_0 e^{-x \sqrt{\frac{\pi}{aT}}} \cos \left( 2 \frac{\pi t}{T} - x \sqrt{\frac{\pi}{aT}} \right)$$

покласти

$$\cos \left( 2 \frac{\pi t}{T} - x \sqrt{\frac{\pi}{aT}} \right) = 1, \quad \text{отже} \quad 2 \frac{\pi t}{T} - x \sqrt{\frac{\pi}{aT}} = 0,$$

далі покласти  $t = \frac{T}{2}$ . Тоді

$$2 \frac{\pi T}{T} - x \sqrt{\frac{\pi}{aT}} = 0, \quad x = \sqrt{\pi a T}.$$

Оскільки рік має  $8760_{год}$   $\frac{T}{2} = 4380_{год}$ , для гірських порід (середнє значення)  $a = 0,0118 \frac{м^2}{год}$  маємо

$$x = \sqrt{\pi a T} = \sqrt{\pi 0,0118 \times 8760} = 18,02 м$$

Добова хвиля  $T = 24_{год}$

$$x = \sqrt{\pi a T} = \sqrt{\pi 0,0118 \times 24} = 0,943 м$$

Температура ґрунту має добову та річну періодичність. Добовий перебіг температури ґрунту обумовлений в основному добовим ходом сонячної радіації та випромінюванням земної поверхні. Добовий перебіг температури поверхні ґрунту характеризується одним максимумом (близько 13 год) та одним мінімумом (перед сходом Сонця).

Добові коливання температури ґрунту (м. Київ) у середньому за рік характеризуються даними, наведеними в табл. 1.

**Таблиця 1. Добові коливання температури ґрунту (м. Київ) у середньому за рік**

**Table 1. Daily variations in soil temperature (Kyiv) on average over the year**

| Глибина, см     | Амплітуда, °C | Час, год |         |
|-----------------|---------------|----------|---------|
|                 |               | Максимум | Мінімум |
| Поверхня ґрунту | 14,1          | 13:10    | 03:25   |
| 20              | 2,7           | 18:10    | 08:10   |
| 40              | 1,0           | 23:25    | 12:45   |
| 80              | 0,2           | 07:00    | 19:00   |

В окремі дні добовий перебіг температури ґрунту має суттєві відхилення, що обумовлено значною мірою станом хмарності, опадами, вітрами та ін.

На значення амплітуди добового ходу температури верхніх шарів ґрунту великий вплив має рослинний шар влітку та сніговий шар взимку.

Річний перебіг температури ґрунту характеризується в помірних широтах одним максимумом у червні чи серпні та одним мінімумом у січні чи лютому.

У помірних широтах амплітуда річного ходу температури поверхні оголеного ґрунту приблизно однакова й дорівнює 30 °C.

Отже, по-перше, якщо будинок опалюється, глибина промерзання ґрунту в м. Київ або у будь-якому іншому місті може знизитися до трьох разів від тієї, яка прийнята за нормативну відповідно до ДБН В.2.1-10 (Об'єкти будівництва та промислова продукція будівельного призначення. Основи та фундаменти будинків і споруд).

По-друге, незалежно від геометрії будови і географічного розташування будівлі ґрунт рівномірно промерзати не може. Наприклад, з південного боку при обдманні підйом складе 5 см, а з північного – 15 см. На це може впливати що завгодно, зокрема:

- розташування будівлі на ділянці неправильної форми (нерівномірний рельєф);
- відведення дощових вод до однієї сторони будинку;
- склад ґрунту різний відносно всієї площі будинку.

По-третє, після того, як земля відтає навесні, вона не повторить точну геометрію свого стану до заморозків. Тобто щорічно відбувається значна деформація, яка має

бути врахована під час проєктування й будівництва фундаменту.

У випадку, коли немає можливості скористатися таблицею промерзання ґрунту в Україні, побудованої на основі багаторічних спостережень, використовується система теплотехнічного розрахунку. Цим займається інженер, який створює проєкт майбутньої будівлі.

Глибина промерзання ґрунту залежить від:

- типу і складу ґрунту;
- ступеня зволоженості;
- рівня від'ємних температур у зимовий період.

Але всі ці параметри доволі відносні. Наприклад, взимку одного року мінімальна температура може досягати  $-7$  °C градусів, а в наступному році вже  $-25$  °C. Клімат наразі дуже мінливий і нестабільний. Так само і зі складом ґрунту – він може різко відрізнятися навіть у межах однієї ділянки. А щодо зволоженості, то вона залежить: 1) від ґрунтових вод (їх близькості до поверхні); 2) від характеру осінньої погоди (що більше дощів перед заморозками, то більше зволожений ґрунт).

З непрямих, але значущих чинників – проєкт самої будівлі. Наприклад, для літнього складського приміщення глибину слід враховувати велику, а при будівництві будинку з глибоким опалювальним підвалом вона буде меншою.

**Зверніть увагу: нормативна глибина промерзання і фактична – не те саме!**

Як визначити глибину промерзання ґрунту в Україні за Державними будівельними нормами (ДБН)?

Це – завдання суто фахівців, оскільки результат залежить від правильного розрахунку за досить складною формулою згідно з ДБН В.2.1-10 (П. 7.5.2; п. 7.5.3).

Вона враховує:

- хімічний і структурний склад ґрунту;
- вивчення його фізичних властивостей;
- визначення рівня ґрунтових вод;
- вплив сусідніх будівель на температурний режим та інше.

Згідно з п. 7.5.2 ДСТУ Б.В.2.1-2. нормативну глибину сезонного промерзання ґрунту приймають такою, що дорівнює середній із щорічних максимальних глибин сезонного промерзання ґрунтів (за даними спостережень за період не менше, ніж 10 років) на відкритій, оголеній від снігу і доступній для впливу вітру горизонтальній поверхні майданчика при рівні підземних вод, розташованому нижче глибини сезонного промерзання ґрунтів. При використанні результатів спостережень за фактичною глибиною промерзання слід урахувувати, що вона повинна визначатись за температурою, що характеризує (згідно з ДСТУ Б.В.2.1-2) перехід пластичномерзлого ґрунту у твердомерзлий.

Відповідно до п. 7.5.3 ДСТУ Б.В.2.1-2. нормативну глибину сезонного промерзання ґрунту  $d_{tn}$ , м, за відсутності даних багаторічних спостережень слід визначати на

основі теплотехнічних розрахунків, її нормативне значення допускається визначати за формулою

$$d_{fn}=d_0VM_t, \quad (10)$$

де  $d_0$  – величина, що дорівнює, м, для:

- суглинків і глин  $d_0 = 0,23$ ;
- супісків і пісків пилуватих та дрібних  $d_0 = 0,28$ ;
- пісків гравіюватих, крупних та середньої крупності  $d_0 = 0,3$ ;
- великоуламкових ґрунтів  $d_0 = 0,34$ .

Значення  $d_0$  для ґрунтів неоднорідного складу визначають як середньозважене в межах глибини промерзання;

$M_t$  – безрозмірний коефіцієнт, що чисельно дорівнює сумі абсолютних значень середньомісячних негативних температур за зиму в певному районі, визначають згідно зі СНиП 2.01.01, а за відсутності даних для конкретного району будівництва – за результатами спостережень гідрометеорологічної станції, що перебуває в аналогічних умовах з районом будівництва.

Максимальні значення глибини промерзання ґрунту в Україні наведено в табл. 2.

**Таблиця 2. Глибина промерзання ґрунту в Україні [16]**

**Table 2. Depth of soil freezing in Ukraine [16]**

| Регіон                    | Максимальна глибина промерзання, см |                               |
|---------------------------|-------------------------------------|-------------------------------|
| Автономна Республіка Крим | 60                                  |                               |
| Вінницька область         | 100                                 |                               |
| Волинська область         | 80                                  |                               |
| Дніпропетровська область  | 90                                  |                               |
| Донецька область          | 95                                  | м. Бахмут – 80                |
| Житомирська область       | 100                                 |                               |
| Закарпатська область      | 65                                  | м. Ужгород – 63               |
| Запорізька область        | 80                                  |                               |
| Івано-Франківська область | 70                                  |                               |
| Київська область          | 90                                  | м. Київ – 80–90               |
| Кіровоградська область    | 80                                  | Максимальна зафіксована – 100 |
| Луганська область         | 100                                 |                               |
| Львівська область         | 80                                  |                               |
| Миколаївська область      | 60                                  |                               |
| Одеська область           | 60                                  |                               |
| Полтавська область        | 90                                  |                               |
| Рівненська область        | 100                                 | м. Рівне – 70                 |
| Сумська область           | 95                                  |                               |
| Тернопільська область     | 80                                  |                               |
| Харківська область        | 95                                  |                               |
| Херсонська область        | 60                                  | Максимальна зафіксована – 90  |
| Хмельницька область       | 80                                  |                               |
| Черкаська область         | 90                                  | Максимальна зафіксована – 110 |
| Чернівецька область       | 75                                  |                               |
| Чернігівська область      | 95                                  |                               |

Щодо амплітуди річного ходу температури ґрунту, то з глибиною вона зменшується, запізнюється час настання максимуму та мінімуму температури на різних

глибинах. Зміни річних амплітуд температури ґрунту в Київській області за багаторічними спостереженнями наведені в табл. 3.

**Таблиця 3. Зміни річних амплітуд температури ґрунту в Київській області [17]**

**Table 3. Changes in annual soil temperature amplitudes in the Kyiv region [17]**

| Глибина, см     | Амплітуда температур, °С |
|-----------------|--------------------------|
| Поверхня ґрунту | 31                       |
| 10              | 21                       |
| 25              | 18                       |
| 50              | 16                       |
| 100             | 14                       |
| 200             | 10                       |

Якщо на поверхні ґрунту максимуми температури спостерігаються наприкінці червня, то на глибині 2 м він настає лише в середині серпня.

Згідно з теоретичними розрахунками Фур'є, глибина проникнення річної температури ґрунту повинна приблизно в 19 разів перевищувати глибину проникнення добових коливань. Однак насправді величини цього відношення більше внаслідок збільшення температуропровідності з глибиною, зміни вологості ґрунту за глибинами та в часі й унаслідок меншої пористості ґрунту в глибоких шарах. У середньому глибина проникнення річних коливань температури в глиб ґрунту становить від 8 до 25 м, у деяких випадках вона досягає 30 м.

Час настання максимуму й мінімуму температури з глибиною запізнюється в середньому на 20–30 діб за кожен метр глибини.

Річний перебіг температури ґрунту залежить в основному від рослинного покриву ґрунту – характеру та висоти його протягом року.

Найбільші відмінності спостерігаються в зимовий період, внаслідок зменшення охолодження ґрунту сніговим покривом, що має малу теплопровідність і велику відбивну здатність. Найбільша амплітуда річних коливань температури – на оголеному ґрунті. Природна поверхня ґрунту, покрита взимку сніговим покривом, а влітку травою, має сильно згладжені амплітуди коливань; влітку оголений ґрунт тепліший за ґрунт під природним покривом, взимку (в помірних широтах) оголений ґрунт значно холодніший за ґрунт під сніговим покривом.

#### Висновки:

Теоретично обґрунтовано, що ґрунт є ефективним джерелом низькопотенційної теплової енергії для побудови систем опалення на основі теплових насосів, оскільки температура ґрунту нижче глибини промерзання протягом зимового періоду становить від 2 до 10 °С.

Доведено, що встановлення горизонтальних геотермальних теплообмінників на глибині менше 1,5 м недоцільна у зв'язку з тим, що можливе промерзання ґрунту

на цю глибину та пошкодження системи відбору низькопотенційної теплової енергії.

Наведено математичний апарат для визначення глибини проникнення теплової хвилі та аналітично розраховано, що глибина поширення теплової хвилі дорівнює 0,94 м за добу та 18,02 м за рік, тобто глибину, до якої надійде фронт температурної хвилі за час, що дорівнює половині періоду коливання температури.

Аналітично обґрунтовано, що перебіг температури ґрунту залежить від рослинного покриву ґрунту – його характеру та висоти протягом року.

Мають перспективу подальші дослідження щодо розрахунку можливості застосування сонячної енергії для отримання теплової енергії для зменшення девіації температури теплоносія на вході у випарник теплового насосу, що поступає від горизонтального ґрунтового теплообмінника, змонтованого в ґрунті нижче глибин промерзання та вище нейтрального шару температур.

#### ПОСИЛАННЯ

1. Безродний М. К. Пуховий І. І., Кутра Д. С. Теплові насоси та їх використання: навч. посіб. К.: НТУУ «КПІ». 2013. 312 с.
2. Долинский А. А., Драганов Б. Х. Тепловые насосы в системе теплоснабжения зданий. Промышленная теплотехника. 2008. Т. 30. № 6. С. 71–83.
3. Кудря С. О. Відновлювані джерела енергії. К.: ІБЕ НАН України. 2020. 354 с.
4. Lund J., Sanner B., Rybach L. Curtis R., Hellstrom G. Geothermal (ground-source) heat pumps a world overview. GHC bulletin. 2004. Vol. 9. Pp. 1–10.
5. Морозов Ю. П., Чалаєв Д. М., Ніколаєвська Н. В., Добровольський М. П. Оцінка ефективності використання теплового потенціалу доквілля та верхніх шарів Землі України. Відновлювана енергетика. 2019. № 4 (63). С. 80–88. [https://doi.org/10.36296/1819-8058.2020.4\(63\).80-88](https://doi.org/10.36296/1819-8058.2020.4(63).80-88)

6. Zhu Ke, Blum Philipp, Ferguson Grant, Balke Klaus-Dieter, Bayer Peter. The geothermal potential of urban heat islands. 2010. Environ. Res. Lett. No. 5. Pp. 1–6. <http://dx.doi.org/10.1088/1748-9326/6/1/019501>
7. Морозов Ю. П. та ін. Енергетична ефективність використання перших від поверхні водоносних горизонтів для тепло- і хладопостачання / Ю. П. Морозов, А. А. Баріло, Д. М. Чалаєв, М. П. Добровольський. Відновлювана енергетика. 2019. № 2. С. 70–78. DOI: [https://doi.org/10.36296/1819-8058.2019.2\(57\).70-78](https://doi.org/10.36296/1819-8058.2019.2(57).70-78)
8. Zurian O. V. Comparison of efficiency of geothermal and hydrothermal energy systems. XIX International Multidisciplinary Scientific GeoConference SGEM. Renewable Energy Sources and Clean Tech. Varna. Bulgaria. 2019. С. 83–90. <https://doi.org/10.5593/sgem2019/4.1/S17.011>
9. Малкін Е. С., Кулінко Є. О. Перспективи та аспекти застосування систем теплохолодопостачання, які використовують приповерхневі шари води в якості теплового акумулятора. Вентиляція, освітлення та теплогазопостачання. 2014. № 17. С. 63–69.
10. Denisov O. I. Comparative energy analysis of heat pumps and traditional heating systems. *Tekhnicheskaya teplofizika i promyshlennaya teploenergetika. Ukraine.* 2010. vol. 2. Pp. 22–34.
11. Bayer P., Saner D., Bolay S., Rybach L., Blum P. Greenhouse gas emission savings of ground source heat pump systems in Europe: a review. *Renewable and Sustainable Energy Reviews.* 2012. №16. 1256–1267. <https://doi.org/10.1016/j.rser.2011.09.027>
12. Зур'ян О. В., Олійніченко В. Г. Гідротермальна система отримання теплової енергії, фізичні процеси, ефективність. Вісник Вінницького політехнічного інституту. 2021. № 4. С. 40–46. <https://doi.org/10.31649/1997-9266-2021-157-4-40-46>
13. Zurian O. Barilo A. Impact of the natural temperature regime of the upper layers of Earth on efficiency of a hydrothermal heat pump system. *Journal of Geology, Geography and Geocology.* 2022. Vol. 31 No. 3 С. 575–584 <https://doi.org/10.15421/112254>
14. Зур'ян. О. В. Експериментальні дослідження теплового режиму гідротермальної теплонасосної системи. Відновлювана енергетика. 2021. № 4 (67). С. 77–89. [https://doi.org/10.36296/1819-8058.2021.-4\(67\).77-89](https://doi.org/10.36296/1819-8058.2021.-4(67).77-89)
15. Морозов Ю. П., Чалаєв Д. М., Олійніченко В. Г., Величко В. В. Експериментальне дослідження добового акумулювання холоду шляхом використання води підземних горизонтів м. Києва. Відновлювана енергетика. 2019. № 3. С. 67–77. [https://doi.org/10.36296/1819-058.2019.3\(58\).67-77](https://doi.org/10.36296/1819-058.2019.3(58).67-77)
16. Глибина промерзання ґрунту. Website. URL: <https://royalbud.com.ua/blog/glubina-promerzaniya-grunta>
17. Морозов Ю. П. Видобування геотермальної енергії : монографія. К.: ІБЕ НАНУ. 2022. 245 с

## REFERENCES

1. Bezrodnyi M. K. Pukhovyi I. I., Kutra D. S. Teplovi nasosy ta yikh vykorystannia. [Heat pumps and their use]: navch. posib. K.: NTUU «KPI». 2013. 312 s.
2. Dolynskiy A. A., Drahanov B. Kh. Teplovyie nasosy v sisteme teplosnabzheniya zdaniy. [Heat pumps in the heat supply system are installed] *Promishlennaia teploekhnika.* 2008. T. 30. № 6. S. 71–83.
3. Kudria S. O. Vidnovliuvani dzhherela enerhii. [Renewable energy sources]. K.: IVE NAN Ukrainy. 2020. 354 s.
4. Lund J., Sanner B., Rybach L. Curtis R., Hellstrom G. Geothermal (ground-source) heat pumps a world overview. *GHC bulletin.* 2004. Vol. 9. Pp. 1–10.
5. Morozov Yu.P., Chalaiev D.M., Nikolaievskia N.V., Dobrovolskyi M.P. Otsinka efektyvnosti vykorystannia teplovoho potentsialu dovkillia ta verkhnikh shariv Zemli Ukrainy. [Evaluation of the effectiveness of the use of the thermal potential of the environment and the upper layers of the Earth of Ukraine]. *Vidnovliuvana enerhetyka.* 2019. № 4 (63). С. 80–88. [https://doi.org/10.36296/1819-8058.2020.4\(63\).80-88](https://doi.org/10.36296/1819-8058.2020.4(63).80-88)
6. Zhu Ke, Blum Philipp, Ferguson Grant, Balke Klaus-Dieter, Bayer Peter. The geothermal potential of urban heat islands. 2010. Environ. Res. Lett. No. 5. Pp. 1–6. <http://dx.doi.org/10.1088/1748-9326/6/1/019501>
7. Morozov Yu. P. et al. Enerhetychna efektyvnist vykorystannia pershykh vid poverkhni vodonosnykh horyzontiv dlia teplo- i khladopostachannia. [Energy efficiency of using the first aquifers from the surface for heating and cooling] / Yu. P. Morozov, A. A. Barylo, D. M. Chalaiev, M. P. Dobrovolskyi. *Vidnovliuvana enerhetyka.* 2019. № 2. S. 70–78. DOI: [https://doi.org/10.36296/1819-8058.2019.2\(57\).70-78](https://doi.org/10.36296/1819-8058.2019.2(57).70-78)
8. Zurian O. V. Comparison of efficiency of geothermal and hydrothermal energy systems. XIX International Multidisciplinary Scientific GeoConference SGEM. Renewable Energy Sources and Clean Tech. Varna. Bulgaria. 2019. С. 83–90. <https://doi.org/10.5593/sgem2019/4.1/S17.011>
9. Malkin E. S., Kulinko Ye. O. Perspektyvy ta aspekty zastosuvannia system teplokhodopostachannia, yaki vykorystovuiut prypoverkhnevi shary vody v yakosti teplovoho akumuliatora. [Prospects and aspects of the application of heat and cold supply systems that use near-surface layers of water as a heat accumulator]. *Ventylatsiia, osvittennia ta teplohozopostachannia.* 2014. № 17. S. 63–69.

10. Denisov O. I. Comparative energy analysis of heat pumps and traditional heating systems. *Tekhnicheskaya teplofizika i promyshlennaya teploenergetika. Ukraine*. 2010. Vol. 2. Pp. 22–34.
11. Bayer P., Saner D., Bolay S., Rybach L., Blum, P. Greenhouse gas emission savings of ground source heat pump systems in Europe: a review. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*. 2012. № 16: 1256–1267. <https://doi.org/10.1016/j.rser.2011.09.027>
12. Zurian O. V., Oliinichenko V. H. Hidrotermalna systema otrymannia teplovoi enerhii, fizychni protsesy, efektyvnist. [Hydrothermal system for obtaining thermal energy, physical processes, efficiency]. *Visnyk Vinnytskoho politekhnichnoho instytutu*. 2021. № 4. S. 40–46. <https://doi.org/10.31649/1997-9266-2021-157-4-40-46>
13. Zurian O. Barilo A. Impact of the natural temperature regime of the upper layers of Earth on efficiency of a hydrothermal heat pump system. *Journal of Geology, Geography and Geoecology*. 2022. Vol. 31. No 3. S. 575–584 <https://doi.org/10.15421/112254>
14. Zurian. O. V. Eksperymentalni doslidzhennia teplovoho rezhymu hidrotermalnoi teplonasosnoi systemy. [Experimental studies of the thermal regime of the hydrothermal heat pump system]. *Vidnovliuvana enerhetyka*. 2021. No. 4 (67). S. 77–89. [https://doi.org/10.36296/1819-8058.2021.4\(67\).77-89](https://doi.org/10.36296/1819-8058.2021.4(67).77-89)
15. Morozov Yu. P., Chalaev D. M., Olynichenko V. G., Velichko V. V. Eksperymentalne doslidzhennia dobovoho akumuluvannia kholodu shliakhom vykorystannia vody pidzemnykh horyzontiv m. Kyieva. [Experimental study of daily accumulation of cold by using water from the underground horizons of the city of Kyiv]. *Vidnovliuvana enerhetyka*. 2019. No. 3. S. 67–77. [https://doi.org/10.36296/1819-058.2019.3\(58\).67-77](https://doi.org/10.36296/1819-058.2019.3(58).67-77)
16. Hlybina promerzannia gruntu [Depth of soil freezing]. Website. URL: <https://royalbud.com.ua/blog/glubina-promerzaniya-grunta>
17. Morozov Yu. P. Vydobuvannia heotermalnoi enerhii: monohrafiia. [Extraction of geothermal energy]. K.: IVE NANU. 2022. 245 s.