

ВИЗНАЧЕННЯ ШВИДКОСТІ РУХУ ТЕЧІЇ ЗА ВІЛЬНОЇ ЦИРКУЛЯЦІЇ ТЕПЛОНОСІЯ В СОНЯЧНИХ ВОДОНАГРІВАЛЬНИХ УСТАНОВКАХ

Отримано 15 черв. 2025 р.; рекомендовано до публікації 22 вер. 2025 р.
Доступно онлайн 30 вер. 2025 р.

Головко В. М.¹, Володарський В. Г.²

Автор для кореспонденції: Головко Володимир,
e-mail: golovkovm@ukr.net

¹ д-р. техн. наук, професор.
<https://orcid.org/0000-0003-0195-9654>

² аспірант
<https://orcid.org/0009-0002-6133-2298>

¹ Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», м. Київ, Україна

^{1,2} Інститут відновлюваної енергетики НАН України, м. Київ, Україна

Анотація. У статті наведена математична модель руху теплоносія в системах сонячного водонагрівання з природною (вільною) циркуляцією. Отримано диференціальне рівняння для швидкості течії, яке враховує гравітаційний напір, викликаний різницею густини гарячого й холодного теплоносія, та гідравлічні втрати на тертя й місцеві опори. Розглянуто характер зміни різниці температур між нагрітою та холодною ділянками контуру протягом технологічного періоду нагрівання та запропоновано опис цієї залежності узагальненою гамма-подібною функцією з регульованим піком. На основі отриманої моделі виконано чисельне моделювання нестационарної швидкості руху теплоносія та об'ємної витрати. Наведено графіки залежностей, а також поверхню, що ілюструє взаємозв'язок між витратою, часом та температурним напором. У висновках окреслено новизну отриманих результатів, практичну цінність для розробки ефективних сонячних геліосистем з природною циркуляцією, а також можливі напрями подальших досліджень, зокрема врахування нелінійних властивостей теплоносія та оптимізація конструкції систем.

Ключові слова: відновлювані джерела енергії, енергія сонячного випромінювання, природна циркуляція, сонячний водонагрівач, швидкість течії, температурний напір.

DETERMINATION OF FLOW VELOCITY UNDER FREE CIRCULATION OF HEAT CARRIER IN SOLAR WATER HEATING SYSTEMS

Received Jun. 15, 2025; accepted Sept. 22, 2025
Available online Sept. 30, 2025

Golovko V.¹, Volodarskyi V.²

Author for correspondence: Golovko Volodymyr,
e-mail: golovkovm@ukr.net

¹ Dr. of Tech. Sciences, professor.
<https://orcid.org/0000-0003-0195-9654>

² Postgraduate Student
<https://orcid.org/0009-0002-6133-2298>

¹ National Technical University of Ukraine «Ihor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute»; Kyiv, Ukraine.

^{1,2} Institute of Renewable Energy NAS Ukraine, Kyiv, Ukraine

Abstract. An analytical model for the flow of heat carrier in natural-circulation (thermosiphon) solar water heaters is presented. A differential equation for the flow velocity is derived, accounting for the gravitational driving head due to density differences between hot and cold fluid and for hydraulic losses (friction and local resistances). The time evolution of the temperature difference between the heated and cold sections of the loop is characterized and described by a generalized gamma-like function with a controllable peak. Using the derived model, the unsteady velocity and volumetric flow rate of the circulating fluid are simulated numerically. Graphs of are provided, as well as a surface illustrating the relationship between flow rate, time, and temperature head. The conclusions highlight the scientific novelty of the results, their practical significance for designing efficient thermosiphon solar heaters, and directions for further research, including accounting for nonlinear fluid properties and system optimization.

Keywords: *renewable energy sources, solar radiation energy, natural circulation, solar water heater, flow rate, temperature head.*

Вступ. Сонячні водонагрівальні системи з природною (вільною) циркуляцією теплоносія, відомі як термосифонні, широко застосовуються завдяки простоті та надійності. У таких системах рух теплоносія відбувається без насосів – за рахунок різниці густини нагрітого та холодного теплоносія. Гарячий теплоносій піднімається у верхній теплообмінник (бак-накопичувач), а охолоджений опускається вниз до колектора, утворюючи замкнений цикл циркуляції. Ефективність роботи термосифонного сонячного водонагрівача значною мірою залежить від швидкості циркуляції теплоносія і пов'язаної з нею теплової витрати, оскільки надто повільний потік може призводити до перегрівання колектора, а надто швидкий – до недогрівання теплоносія [4]. Тому розуміння закономірностей руху теплоносія за природної циркуляції є важливим для оптимального проектування таких систем і керування ними.

Аналіз природної циркуляції в геліосистемах вимагає врахування нерівномірного нагрівання протягом технологічного періоду, гідравлічного опору трубопроводів та інерційних властивостей рідини. Раніше проведено ряд досліджень, присвячених моделюванню й експериментальному вивченню термосифонних контурів. Зокрема, у роботі Содха і Тіварі (1981) виконано один з перших аналізів ефективності природної циркуляції в сонячних водонагрівачах. У наступних дослідженнях приділяли увагу як стаціонарним режимам, так і перехідним процесам, включно з питаннями стабільності природної циркуляції [5]. Експериментальні роботи (Shitzer et al., 1979; Zvirin et al., 1977) підтвердили залежність витрати від температурного напору та дозволили верифікувати математичні моделі термосифонних систем [6]. У вітчизняній науковій літературі питання моделювання природної циркуляції теплоносія в енергетичних установках та геліосистемах розглянуто, зокрема, у навчальних посібниках Риндюка і Дяківа [1] та УДХТУ (2017) [2], де наведено методи розрахунку теплових процесів у замкнених контурах.

Незважаючи на наявність значного доробку, аналітичний опис нестационарної швидкості теплоносія в термосифонних системах залишається актуальним. У цій статті пропонується вивести співвідношення, що описують динаміку розгону теплоносія від початку нагрівання, та отримати явну форму диференціального рівняння руху. Такий підхід дозволяє поглиблено зрозуміти вплив основних параметрів (геометрія контуру, властивості рідини, профіль нагрівання) на характер течії.

Постановка завдання. Метою роботи є визначення швидкості течії теплоносія $v(t)$ у замкненому контурі сонячного водонагрівача з природною циркуляцією. Для досягнення цієї мети необхідно виконати такі завдання:

- визначити рівняння руху рідини в контурі на основі закону збереження кількості руху (закону Ньютона) з

урахуванням рушійної сили (гравітаційного напору) та сил опору;

- встановити різницю густини гарячого і холодного теплоносія через різницю температур $\Delta T(t)$ та її вплив на рівняння руху;
- отримати диференціальне рівняння для швидкості $v(t)$ і проаналізувати його структуру;
- задати функцію зміни $\Delta T(t)$ протягом технологічного періоду нагрівання на основі експериментальних даних або відомих моделей;
- розв'язати отримане рівняння чисельно для заданих умов та побудувати графіки залежностей $v(t), Q(t)$ тощо;
- проаналізувати результати моделювання, зокрема вплив температурного режиму на характер течії.

Виклад основного матеріалу. Для опису руху теплоносія приймаються типові спрощення, що використовуються в однофазних моделях термосифонних контурів [5]. Вважаємо, що контур можна звести до еквівалентної замкненої трубки постійного перерізу S , заповненої рідиною з середніми термофізичними властивостями (густина ρ , кінематична в'язкість ν тощо). Нагрів відбувається в нижній частині контуру (сонячний колектор), охолодження – у верхній (бак). Вертикальна відстань між центрами нагрівання й охолодження позначена як h . Під час нагрівання рідини в колекторі її густина зменшується, тоді як в охолодженій частині контуру густина вища. Це створює гідростатичний напір, який змушує рідину підійматися вгору вздовж нагрітого стояка і спричиняти її циркуляцію.

Гравітаційний напір. Для оцінки рушійної сили використовуємо закон Паскаля для різниці гідростатичного тиску. Різниця тисків між холодною та нагрітою гілками вертикального контуру визначається як:

$$\Delta p = \rho_{\text{хол}} g h - \rho_{\text{гар}} g h = (\rho_{\text{хол}} - \rho_{\text{гар}}) g h, \quad (1)$$

де: $\rho_{\text{хол}}$ – густина холодного (ненагрітого) теплоносія; $\rho_{\text{гар}}$ – густина нагрітого теплоносія; g – прискорення вільного падіння; h – ефективна висота між гарячою і холодною зонами.

Вираз (1) показує, що різниця тиску Δp прямо пропорційна різниці густин $(\rho_{\text{хол}} - \rho_{\text{гар}})$. Оскільки $\rho_{\text{хол}} > \rho_{\text{гар}}$, то $\Delta p > 0$, тобто виникає надлишковий тиск, спрямований знизу вгору вздовж нагрітого стояка, який і спричиняє рух рідини. Цей тиск називають гравітаційним (архімедовим) напором. [7]

Залежність густини від температури. Зв'язок між густиною рідини й температурою можна лінеаризувати для

діапазону робочих температур. Припустимо, що густина змінюється за законом:

$$\rho(T) \approx \rho_0[1 - \beta(T - T_0)], \quad (2)$$

де: ρ_0 – густина за деякої опорної температури T_0 (наприклад, за кімнатної температури або при T_0 , рівному середній температурі контуру); β – коефіцієнт об'ємного теплового розширення теплоносія (для води $\beta = 3 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$ у діапазоні $20\text{--}80^\circ\text{C}$ [8]). Для невеликих перепадів температур використання лінійної апроксимації є цілком обґрунтованим [2]. Тоді різницю густин можна виразити через різницю температур між холодною та гарячою ділянками: якщо $\Delta T = T_{\text{гар}} - T_{\text{хол}}$ (де $T_{\text{гар}}$ – температура теплоносія на виході з колектора, $T_{\text{хол}}$ – температура на вході), то із (2) випливає

$$\rho_{\text{хол}} - \rho_{\text{гар}} \approx \rho_0 \beta (T_{\text{гар}} - T_{\text{хол}}) = \rho_0 \beta \Delta T, \quad (3)$$

Після підстановки (3) у рівняння гравітаційного напору (1), отримуємо:

$$\Delta p = gh \rho_0 \beta \Delta T, \quad (4)$$

Таким чином, рушійний надлишковий тиск прямо пропорційний різниці температур ΔT між нагрітим і холодним теплоносієм. Отриманий вираз (4) узгоджується з фізичною природою термосифонної циркуляції: що більше нагрівання, то більша різниця густини і, відповідно, більша сила, що витискає рідину вгору.

Підйомна сила. Різниця тиску Δp діє на поперечний переріз потоку площею S і створює підйомну силу F_{Π} :

$$F_{\Pi} = \Delta p * S = \rho_0 \beta \Delta T g h S, \quad (5)$$

Сила F_{Π} – це підйомна сила, що розганяє теплоносії у контурі. Її зрівноважують сили опору (тертя і місцевих опорів), які виникають при протіканні рідини трубопроводом.

Втрати на тертя і місцеві опори. Під час руху рідини трубами частина напору витрачається на подолання гідравлічного опору. Розрізняють два види втрат: втрати на тертя вздовж довжини труб та місцеві втрати (у вигинах, звуженнях, трійниках, на вході-виході бака тощо). Тиск втрат позначимо Δp_T (втрати на тертя) і Δp_M (місцеві). Для стаціонарної течії відомі інженерні формули: втрати тиску на тертя можна обчислити за рівнянням Дарсі – Вейсбаха [9]:

$$\Delta p_T = \frac{\lambda L}{D} \frac{\rho v^2}{2}, \quad (6)$$

де: λ – коефіцієнт гідравлічного тертя (залежить від режиму течії та шорсткості труб); L – повна еквівалентна довжина контуру; D – внутрішній діаметр труб; ρ – густина рідини (припускаємо, що зміна густини вздовж

контуру незначна і можна брати середнє значення); v – швидкість течії. Вираз (6) відображає квадратичну залежність втрат тиску від швидкості (для ламінарного або перехідного режиму течії в першому наближенні також можна використати цей підхід).

Місцеві втрати описуються формулою [9]:

$$\Delta p_M = \zeta \frac{\rho v^2}{2}, \quad (7)$$

де ζ – сумарний коефіцієнт місцевих опорів контуру [9]. Він дорівнює сумі коефіцієнтів опору окремих елементів (для прикладу, вхід рідини в трубу з бака $\zeta \approx 0.5$, плавний колінчастий вигин $\zeta \approx 0.2\text{--}0.3$, звуження $\zeta \approx 0.4\text{--}0.8$, зворотний клапан $\zeta \approx 0.2\text{--}0.5$ тощо [9]).

Повні втрати тиску на опір потоку дорівнюють сумі (6) і (7) [10]:

$$\Delta p_{\text{заг}} = \Delta p_T + \Delta p_M = \left(\frac{\lambda L}{D} + \zeta \right) \frac{\rho v^2}{2}, \quad (8)$$

Сила опору потоку аналогічно визначається як

$$F_B = \Delta p_{\text{заг}} * S = \left(\frac{\lambda L}{D} + \zeta \right) \frac{\rho v^2}{2} S. \quad \text{Зазначимо, що}$$

сила опору зростає пропорційно квадрату швидкості й за достатньо великого v зрівноважує рушійну силу, встановлюючи граничну сталу швидкість (режим наближення до статичного балансу сил тяжіння і тертя).

Рівняння руху (рівняння природної циркуляції). Скористаємося другим законом Ньютона, записаним для контрольного об'єму рідини, що рухається в контурі. Нехай у контурі циркулює об'єм рідини $V = L * S$ (довжина L , переріз S). Тоді маса рідини $m = \rho V = \rho L S$. Рівняння руху у формі закону збереження імпульсу можна записати так:

$$m \frac{dv}{dt} = F_{\Pi} - F_B, \quad (9)$$

де: F_{Π} – підйомна сила (5), F_B – сила опору (сума всіх гідравлічних опорів). Підставимо в (9) вирази: $m = \rho L S$, F_{Π} з (5) і F_B . Отримаємо:

$$\rho L S \frac{dv}{dt} = \rho_0 \beta \Delta T g h S - \left(\frac{\lambda L}{D} + \zeta \right) \frac{\rho v^2}{2} S, \quad (10)$$

Скоротимо S (площа перерізу, яка є доданком у кожному члені рівняння) та для спрощення припустимо $\rho \approx \rho_0$ (невелика зміна густини не впливає істотно на інерційний член і втрати, тому беремо середнє значення густини за контуром рівним ρ_0). Тоді рівняння (10) набуває вигляду:

$$\rho_0 L \frac{dv}{dt} = \rho_0 \beta \Delta T g h - \left(\frac{\lambda L}{D} + \zeta \right) \frac{\rho_0 v^2}{2}, \quad (11)$$

Поділимо обидві частини (11) на $\rho_0 L$:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\beta gh}{L} \Delta T(t) - \frac{\lambda L}{2L} + \zeta v^2, \quad (12)$$

Рівняння (12) – відображає баланс між рушійним прискоренням (перший доданок праворуч, пропорційний $\Delta T(t)$) та уповільнювальним впливом гідравлічного опору (другий доданок, пропорційний v^2). Величина $\Delta T(t)$ у загальному випадку є функцією часу, оскільки температура в колекторі змінюється протягом технологічного періоду нагрівання під дією сонячного випромінювання, а температура в баку – внаслідок відбору теплоти і втрат. Таким чином, рівняння (12) є нелінійним диференціальним рівнянням Ріккати з коефіцієнтами, що залежать від часу (через $\Delta T(t)$) [11]. Відзначимо, що якщо різниця температур підтримується сталою ($\Delta T = \text{const}$), рівняння (12) має аналітичний розв'язок. Зокрема, при $\Delta T = \Delta T_0 = \text{const}$ розв'язок описує швидкість v_{cm} , яка визначається нулем правої частини рівняння:

$$\frac{\beta gh}{L} \Delta T_0 - \frac{\lambda L}{2L} + \zeta v_{cm}^2 = 0. \text{ Звідси отримуємо сталу швидкість } v_{cm} = \sqrt{\frac{2\beta gh \Delta T_0}{\lambda L + \zeta}}.$$

Для нестационарного випадку $\Delta T(t)$ змінне, тому для рівняння (12) проведене чисельне інтегрування [5].

Зміна температурного напору протягом доби. Характер зміни різниці температур $\Delta T(t)$ між виходом з колектора і входом у колектор суттєво впливає на поведінку потоку [2]. На світанку, коли колектор лише починає нагріватися, ΔT близька до нуля і рух теплоносія відсутній (стагнація). Далі, у міру зростання сонячного випромінювання, температура на виході з колектора швидко збільшується, перевищуючи температуру в баку, і $\Delta T(t)$ стрімко зростає – починається ранкова фаза розгону потоку. Близько полудня ΔT досягає свого максимуму (пік нагрівання). Після чого, у другій половині дня, різниця температур поступово зменшується, оскільки інтенсивність сонячного нагрівання спадає, і температури в контурі вирівнюються – настає післяобідня фаза уповільнення циркуляції [3]. Згідно з експериментальними спостереженнями та результатами чисельного моделювання, функція $\Delta T(t)$ для сонячної водонагрівальної системи може бути узагальнено описана кривою, що має нуль на початку дня, один виражений максимум у полудень та асимптотично знижується до нуля у вечірні години. Для аналітичного задання такої кривої зручно використати нормалізовану гамма-подібну функцію з керованою формою піка [3].

Запишемо її явний вигляд:

$$\Delta T(t) = T_{\max} \left(\frac{t}{\tau} \right)^n e^{(n(1-\frac{t}{\tau}))}, \quad (13)$$

де: $T_{\max}$ – максимально можлива різниця температур у системі (значення ΔT у момент піка при $t = \tau$); параметр τ – час досягнення пікової різниці температур (відлічується від початку нагрівання); параметр n характеризує гостроту й ширину піка (рекомендовані значення $n = 2 - 4$ для термосифонних систем). Функція (13) описує криву, що відповідає зазначеним фазам: при $t = 0$ значення $\Delta T = 0$ (ранковий розгін); при $t = \tau$ отримуємо $\Delta T(\tau) = T_{\max}$ (максимум); при $t > \tau$ множник $e^{(n(1-\frac{t}{\tau}))}$ задає експоненціальне спадання, тому ΔT зменшується (післяобідня фаза). На рис. 1 наведено типову форму $\Delta T(t)$ згідно з (13) для параметрів $T_{\max} = 30^\circ\text{C}$, $\tau = 5 \text{ год}$, $n = 3$.

Функція (13) задовольняє основні фізичні вимоги до моделі температурного напору: вона неперервна, диференційована, має єдиний екстремум (максимум) та асимптотично прямує до нуля при $t \rightarrow \infty$. Поведінка (13) добре узгоджується з результатами чисельного моделювання температурних режимів у природних циркуляційних системах [3]. Аналогічні за формою функції використовуються і для опису інших нестационарних теплових процесів, наприклад для аналітичного розв'язку задач про температурне поле від рухомого джерела теплоти [3]. У цьому разі застосування гамма-подібної функції дозволяє гнучко змінювати параметри піка $\Delta T(t)$ залежно від кліматичних умов та конструкції конкретної системи (через $T_{\max}$, τ , n), що є зручним для дослідження різних сценаріїв.

Визначення диференціального рівняння швидкості. Підставимо функцію (13) для $\Delta T(t)$ у рівняння руху (12). Тоді рівняння (12) набуває вигляду:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\beta gh}{L} T_{\max} \left(\frac{t}{\tau} \right)^n e^{(n(1-\frac{t}{\tau}))} - \frac{\lambda L}{2L} + \zeta v^2, \quad (14)$$

Рівняння (14) – нелінійне диференціальне рівняння Ріккати з явно заданою залежністю коефіцієнтів від часу t . Аналітичного розв'язку в замкнутій формі для такого рівняння не існує [11]. Це зумовлено складним характером функції $\Delta T(t)$: права частина (14) є не поліноміальною функцією часу. Відомі методи розв'язання рівнянь Ріккати (підстановкою в лінійне рівняння другого порядку) не дають спрощення через наявність експоненціально-залежного від t коефіцієнта при v_0 . Тому для аналізу поведінки $v(t)$ доцільно застосувати чисельне інтегрування.

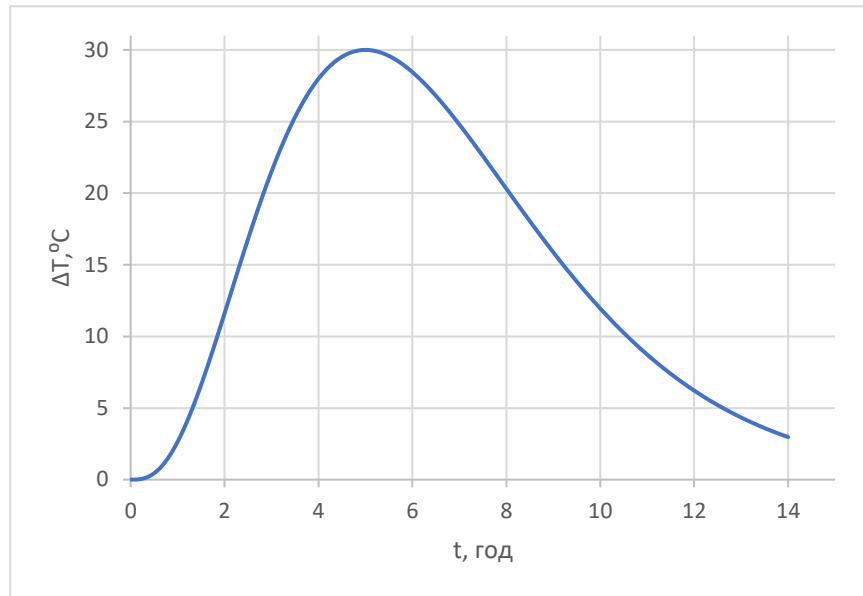


Рис. 1. Залежність температурної різниці $\Delta T(t)$, заданої узагальненою гамма-подібною функцією (параметри: $T_{\max} = 30^\circ\text{C}$, $\tau = 5\text{год}$, $n = 3$)

Fig. 1. Dependence of the temperature difference $\Delta T(t)$ defined by the generalized gamma-like function (parameters: $T_{\max} = 30^\circ\text{C}$, $\tau = 5\text{год}$, $n = 3$)

Перед проведенням чисельного експерименту визначимо початкові умови. На початку процесу, при $t = 0$, вважаємо, що теплоносій перебуває в стані спокою. Отже,

$$v(0) = 0, \quad (15)$$

а початкова різниця температур також відсутня: $\Delta T(0) = 0$ (колектор і бак мають однакову температуру на початку процесу нагрівання). Це означає, що в момент старту процесу ліва частина (14) і обидва доданки правої рівні нулю, тобто система перебуває в нестійкій рівновазі (будь-яке невелике зростання $T_{\max}(t)$ приведе до появи рушійної сили і початку руху). Диференціальне рівняння (14) з початковою умовою (15) було проінтегровано чисельно методом Рунге – Кутта 4(5) порядку (явний метод зі змінним кроком, що реалізовано, функцією *ode45* у MATLAB). Розрахунок проводився для низки сценаріїв, зокрема для характерних значень параметрів контуру і різних максимальних температурних напорів. Нижче розглянуто приклад типової геліосистеми: висота контуру $h = 1.2\text{м}$, довжина труб $L = 10\text{м}$, діаметр труб $D = 20\text{мм}$, теплоносій – вода ($\beta = 3 \cdot 10^{-4} \text{K}^{-1}$, $\rho = 1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$), коефіцієнт тертя $\lambda = 0.1$ (умовно сталий у межах робочого режиму), сумарний коефіцієнт місцевих опорів $\zeta = 20$. Параметри функції $\Delta T(t)$ вибрано як $T_{\max} = 30^\circ\text{C}$, $\tau = 5\text{год}$, $n = 3$, що відповідає сонячному ясному дню з різким

виходом на максимум опівдні та помірним спадом після полудня.

Чисельне моделювання та результати. Розв'язок рівняння (14) для описаних умов дає залежність швидкості $v(t)$ теплоносія в контурі. За допомогою цієї швидкості можна знайти й об'ємну витрату: $Q(t) = v(t)S$, де

$$S = \frac{\pi D^2}{4} - \text{площа поперечного перерізу труб. На}$$

рис. 2 наведено зміну швидкості $v(t)$ протягом технологічного періоду нагрівання. Спочатку, коли ΔT мала, швидкість залишається близькою до нуля. Далі, приблизно від $t \approx 1$ год, коли колектор прогрівається і ΔT перевищує певний поріг, швидкість починає зростати. Вона досягає максимуму $v_{\max} \approx 0.043 \text{ м/с}$ приблизно через 5 год, тобто трохи пізніше максимуму ΔT (який був о 12:00). Невелике відставання піка $v(t)$ від піка $\Delta T(t)$ зумовлене інерційністю системи: навіть після того, як рушійний перепад температур почав спадати, течія ще деякий час залишається значною через кінетичну енергію рідини. Після максимуму швидкість поступово спадає внаслідок зменшення ΔT і зростання впливу сил тертя при меншому рушійному напорі. До кінця періоду нагрівання ($t > 10$ год) $v(t)$ прямує до нуля, коли нагрівання майже припиняється. Отже циркуляція практично зупиняється із заходом сонця.

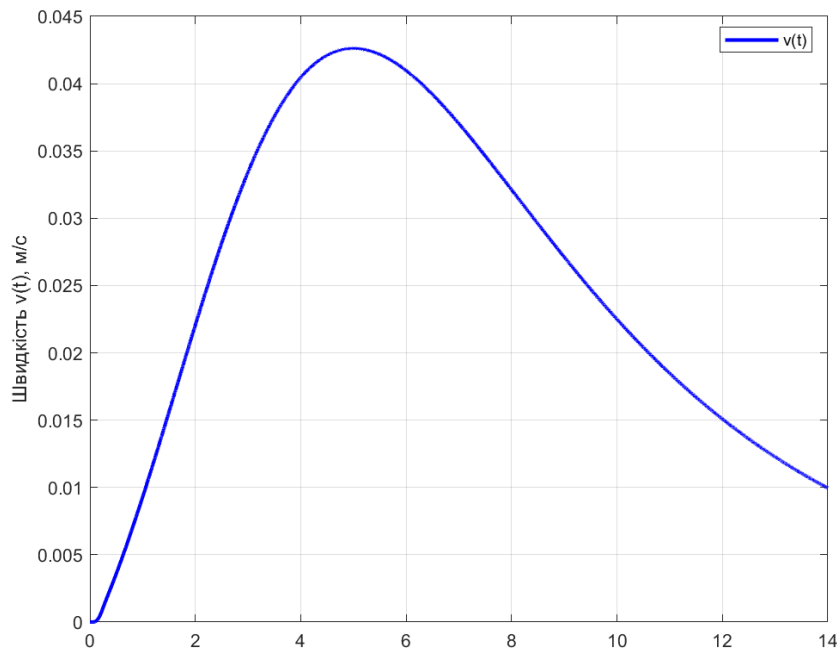


Рис. 2. Зміна швидкості теплоносія $v(t)$ протягом технологічного періоду нагрівання (параметри системи зазначені в тексті)

Fig. 2. Variation of the heat carrier velocity $v(t)$ during the technological heating period (system parameters are specified in the text).

На рис. 3 наведена просторово-часова залежність $Q(t, \Delta T)$ у вигляді поверхні. На горизонтальних осях відкладений час t та відповідне значення ΔT (що змінюється з часом відповідно до (13)), на вертикальній осі – миттєве значення витрати Q . Поверхня побудована для кількох сценаріїв з різними значеннями $T_{\max}$ (від 0.5 до 30°C), що еквівалентно різним рівням нагрівання колектора. Як видно, при більших максимальних перепадах температур (жовто-зелена частина поверхні) досягаються відповідно більші витрати Q . Крива на передньому плані (синій край) відповідає найменшому $T_{\max} = 5^\circ\text{C}$ – у цьому випадку циркуляція ледь починається і швидко згасає. Зі збільшенням $T_{\max}$ поверхня розгортається вгору та розширюється в часі, відображаючи посилення і подовження циркуляції. Така тривимірна візуалізація підтверджує, що для цієї системи Q однозначно визначається станом ΔT у час t (при фіксованих інших параметрах): більший температурний напір зумовлює вищу витрату, але залежність нелінійна і проявляється гістерезис – наприклад, на фазі розгону і фазі спаду однакові значення ΔT дають дещо різні Q через інерційність (на початку процесу нагрівання крива поверхні піднімається швидше, ніж опускається в кінці процесу).

Отримані результати узгоджуються з фізичним уявленням про роботу термосифонних систем. Зокрема, модель демонструє, що існує певний критичний показник

нагрівання, після якого система «самозапущається» – до цього моменту циркуляція була відсутня. Це пояснює затримку початку руху вранці, коли сонячна радіація ще недостатня для подолання сил в'язкого тертя. Також максимальна швидкість і витрата визначаються балансом між гравітаційним напором і втратами: збільшення тертя (наприклад, у довшому або вузшому трубопроводі) призведе до меншої пікової швидкості, навіть якщо $T_{\max}$ високий. Модель дозволяє оцінити вплив кожного параметра. Наприклад, збільшення висоти h підйому бака підсилює рушійну силу (пропорційно h в (12)) – відповідно швидкість зростає, тоді як збільшення довжини L чи коефіцієнтів опору λ, ζ підсилює гальмівний член – швидкість зменшується. Таким чином, рівняння (12) і чисельні експерименти на його основі можуть бути використані для оптимізації конструкції: вироблення рекомендацій щодо вибору висоти встановлення бака, діаметра труб, спрощення траси трубопроводу (щоб зменшити ζ) тощо. Варто зазначити, що запропонована модель є однофазною і не враховує можливого закипання теплоносія. У реальних умовах за дуже високого нагрівання колектора (понад 100°C для відкритих систем на воді) може відбутися пароутворення, що якісно змінює характер циркуляції (двофазний термосифон). Окрім того, ця модель не враховує зворотного термосифонного потоку вночі, коли вода в баку тепліша, ніж в колекторі – у таких умовах ΔT змінює знак і в рівнянні (12) рушійний член стає негативним, що могло б описати зворотну циркуляцію.

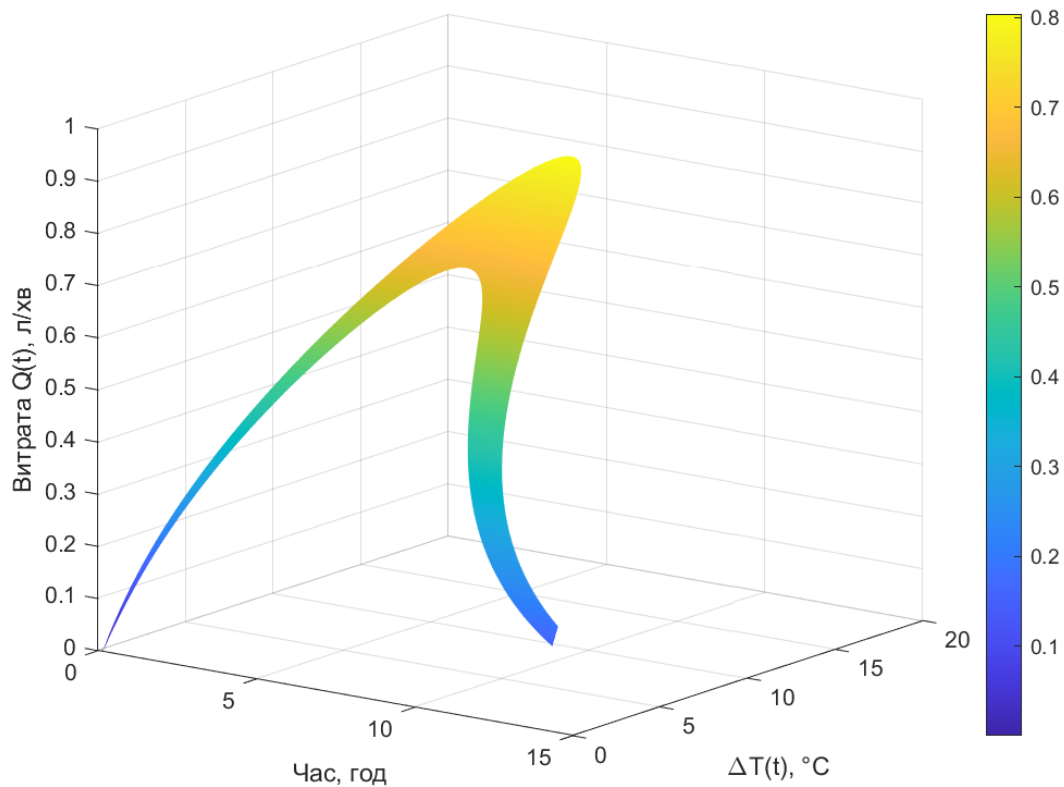


Рис. 3. Поверхня залежності об'ємної витрати Q від часу t і різниці температур ΔT . Показано результати для кількох рівнів максимального нагріву (колірним переходом від синього при $T_{\max} = 5^{\circ}\text{C}$ до жовтого при $T_{\max} = 30^{\circ}\text{C}$)

Fig. 3. Surface of the volumetric flow rate Q as a function of time t and temperature difference ΔT . The results are shown for several levels of maximum heating (with a color transition from blue at $T_{\max} = 5^{\circ}\text{C}$ to yellow at $T_{\max} = 30^{\circ}\text{C}$).

Висновки

1. Проведені дослідження процесу природної циркуляції теплоносія в замкненому контурі сонячної водонагрівальної установки дозволили отримати диференціальне рівняння, що описує зміну швидкості течії під дією гравітаційного напору та гідравлічного опору. Запропоновано описувати нестационарний температурний напір у контурі сонячної водонагрівальної установки узагальненою гамма-подібною функцією.
2. Аналітична модель та отримані графічні результати оцінюють характер течії в термосифонній системі за заданих умов. Рівняння (12) – (13) і похідні від них розраховують час розгону циркуляції від нуля до робочого режиму, максимальну швидкість потоку та витрату, час їх досягнення, а також час затухання циркуляції після зниження нагріву. Це дозволяє здійснити вибір потрібних параметрів системи: діаметра і довжини труб, висоти розміщення бака, об'єму теплоносія тощо. Результати моделювання показали, що для запуску природної циркуляції існує порогове значення, а також виявлено гістерезис у зміні витрати в фазі розгону і спадання.
3. Виявлено потенціал розвитку моделі шляхом врахування температури теплоносія більш детально вздовж

контур під час розв'язування спільно рівняння руху та енергетичного балансу. Врахування двофазних режимів – кипіння і конденсації, що потребує внесення в модель додаткових членів або використання складніших станів рівнянь. Дослідження стабільності розв'язків рівняння (14), оскільки відомо, що в природних циркуляційних петлях можливі автоколивання і біфуркації за певних умов. Впровадження додаткових методів інтенсифікації теплообміну в зоні нагрівання та перетоку між колектором та баком для забезпечення раннього запуску циркуляції, зниження температурного навантаження на колектор і підвищення загальної ефективності сонячних установок з природною циркуляцією.

ПОСИЛАННЯ

1. Риндюк Д. В., Дьяків О. І. *Математичне моделювання теплових процесів в енергетиці та промисловості: Конспект лекцій*. Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. [Електронне джерело: <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/41557>]
2. Теплові процеси. Конспект лекцій. УДХТУ, 2017. [https://udhtu.edu.ua/wp-content/uploads/2017/08/Paht_2768.pdf]

3. Huang Y., Chen C. *Analytic study of temperature solutions due to gamma-type moving heat sources*. // Int. J. Heat Mass Transfer. 2005. Vol. 48. No. 25–26. P. 5530–5541. [https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2005.07.004]
4. Yi-Mei Liu, Kung-Ming Chung, Keh-Chin Chang, Tsong-Sheng Lee, Performance of Thermosyphon Solar Water Heaters in Series, *Energies* 2012, 5, 3266–3278; doi:10.3390/en5093266
5. Knaani, A. , Zvirin, Yoram, NATURAL CIRCULATION LOOPS, THERMOSYPHONS, 2011, doi:10.1615/AtoZ.n.natural_circulation_loops_thermosyphons
6. Mertol, A., Greif, R., Review of Thermosyphon Solar Water Heaters. In: Yüncü, H., Paykoc, E., Yener, Y. (eds) *Solar Energy Utilization*. NATO ASI Series, vol 129. Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-94-009-3631-7_28
7. Гашук П. М., ЕНЕРГІЯ ТА УПОРЯДКОВАНІЙ РУХ, Львів, Українські технології, 2004. 606 с.
8. Яворський Б. М., Детлаф А. А., Лебедев А. К. Довідник з фізики для інженерів та студентів вищих навчальних закладів / Переклад з 8-го переробл. і випр. вид. Тернопіль: Навчальна книга — Богдан, 2007. 1040 с. ISBN 966-692-818-3.
9. Кулінченко В. Р. Гідравліка, гідравлічні машини і гідропривід: Підручник. Київ: Фірма «Інкос», Центр навчальної літератури, 2006. 616 с. ISBN 966-8347-38-2
10. Світлий Ю. Г., Білецький В. С. Гідравлічний транспорт (монографія). Донецьк: Східний видавничий дім, Донецьке відділення НТШ, «Редакція гірничої енциклопедії», 2009. 436 с.
11. Самойленко А. М., Перестюк М. О., Парасюк І. О. Диференціальні рівняння: Підручник. К.: Либідь, 2003. 600 с.
- Notes. Kyiv: Igor Sikorsky KPI, 2020. [Electronic source: https://ela.kpi.ua/handle/123456789/41557]
2. *Thermal Processes. Lecture Notes*. UDHTU, 2017. [https://udhtu.edu.ua/wp-content/uploads/2017/08/Paht_2768.pdf]
3. Huang Y., Chen C. Analytic study of temperature solutions due to gamma-type moving heat sources. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2005, Vol. 48, No. 25–26, pp. 5530–5541. [https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2005.07.004]
4. Yi-Mei Liu, Kung-Ming Chung, Keh-Chin Chang, Tsong-Sheng Lee. Performance of Thermosyphon Solar Water Heaters in Series. *Energies*, 2012, 5, pp. 3266–3278. [https://doi.org/10.3390/en5093266]
5. Knaani A., Zvirin Y. Natural Circulation Loops, Thermosyphons. 2011. [https://doi.org/10.1615/AtoZ.n.natural_circulation_loops_thermosyphons]
6. Mertol A., Greif R. Review of Thermosyphon Solar Water Heaters. In: Yüncü H., Paykoc E., Yener Y. (eds) *Solar Energy Utilization*. NATO ASI Series, vol 129. Springer, Dordrecht. [https://doi.org/10.1007/978-94-009-3631-7_28]
7. Hashchuk P. M. *Energy and Ordered Motion*. Lviv: Ukrainski Tekhnologii, 2004. 606 p.
8. Yavorskyi B. M., Detlaf A. A., Lebedev A. K. *Handbook of Physics for Engineers and University Students*. 8th revised and updated ed., translated. Ternopil: Navchalna Knyha – Bohdan, 2007. 1040 p. ISBN 966-692-818-3.
9. Kulinchenko V. R. *Hydraulics, Hydraulic Machines and Hydraulic Drive: Textbook*. Kyiv: Inkos Publishing, Center of Educational Literature, 2006. 616 p. ISBN 966-8347-38-2.
10. Svitlyi Yu. H., Biletskyi V. S. *Hydraulic Transport (Monograph)*. Donetsk: Skhidnyi Publishing House, Donetsk Branch of Shevchenko Scientific Society, "Editorial Board of Mining Encyclopedia", 2009. 436 p.
11. Samoilenko A. M., Perestyuk M. O., Parasyuk I. O. *Differential Equations: Textbook*. Kyiv: Lybid, 2003. 600 p.

REFERENCES

1. Ryndiuk D. V., Diakiv O. I. *Mathematical Modeling of Thermal Processes in Energy and Industry: Lecture*